CUBO DI UN NUMERO ESPRESSO SOTTO FORMA DI SOMMA DI NUMERI DISPARI

Dimostriamo il seguente enunciato :

Il cubo di un numero *n* è uguale alla somma degli n-esimi numeri dispari successivi , partenti da un numero dispari che chiameremo "dispari di partenza" .

Questo enunciato può essere rappresentato nella forma sotto riportata, in cui ($n^2 - n + 1$) è, per l'appunto, il dispari di partenza:

$$\boldsymbol{n^3 = \sum_{k=0}^{n-1}[(n^2 - n + 1) + 2k]} \qquad \boldsymbol{(1)}$$

In altre parole :
1^3 =1;
2^3 = 3+5 (somma di **due** numeri dispari di cui il 3 è il numero dispari di partenza);
3^3 = 7+9+11 (somma di **tre** numeri dispari di cui il 7 è il numero dispari di partenza);
4^3 = 13+15+17+19 (somma di **quattro** numeri dispari di cui il 13 è il numero dispari di partenza);
…….
n^3 = somma di **n** numeri dispari = numero dispari di partenza + n-1 numeri dispari successivi.
Il problema è di conoscere il numero dispari di partenza.
Intanto osserviamo, a titolo di esempio, che prima di 7 (che è il primo numero dispari da cui partire per poter calcolare 3^3) ci sono 2 + 1 numeri dispari. Infatti 7 è il 4° numero dispari ([7 + 1]/2).
Continuando, 3^3 = 27 è dato dalla somma di 7 + 9 + 11 , che sono i 3 numeri dispari successivi ai 2 numeri dispari (il 3 e il 5) che, sommati tra di loro,danno come risultato il cubo perfetto precedente a 3^3,ossia 2^3 = 8 .
A sua volta 2^3 è dato dalla somma di due numeri dispari (3 + 5) che sono i due numeri dispari successivi al primo numero dispari, che essendo unico, è quindi esso stesso il cubo perfetto precedente a 2^3 ,ossia 1^3 = 1.
Pertanto il numero dispari di partenza si ottiene considerando che:

- $\frac{n(n-1)}{2}$ è la quantità dei numeri dispari che precedono il numero dispari di partenza;
- perciò il numero dispari di partenza è il $\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right) - esimo$ numero dispari;
- al $\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right) - esimo$ numero dispari si devono aggiungere n-1 numeri dispari successivi (per avere la somma di n numeri dispari);
- due numeri dispari differiscono di 2;

Quindi il numero dispari di partenza che occupa la $\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right) - esima$ posizione corrisponde a $2\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right) - 1 = \boldsymbol{n^2 - n + 1}$.
Da qui si può affermare che la **(1)** è vera.
Esempio:

$$\boldsymbol{5^3 = \sum_{k=0}^{4}[(5^2 - 5 + 1) + 2k] = \underset{k=0}{21} + \underset{k=1}{(21 + 2)} + \underset{k=2}{(21 + 4)} + \underset{k=3}{(21 + 6)} + \underset{k=4}{(21 + 8)} = 125}$$

Osservazione: 125=5x21+5x4 dove 21 è il numero dispari iniziale; ciò suggerisce che

$$\boldsymbol{n^3 = n(n^2 - n + 1) + n(n - 1)}$$

che rappresenta un altro modo per ottenere il cubo di un numero.

Vitto Giuseppe