CUBO DI UN NUMERO ESPRESSO SOTTO FORMA DI SOMMA DI NUMERI DISPARI

Ci accingiamo a dimostrare il seguente enunciato :

$$n^3 = \sum_{k=0}^{n-1}[(n^2 - n + 1) + 2k] \qquad (\mathbf{1})$$

dove $(n^2 - n + 1)$ rappresenta il numero dispari di partenza a cui si devono aggiungere gli (n-1)-esimi numeri dispari successivi per poter calcolare n^3.

Utilizzeremo come metodo di dimostrazione quello dell'**induzione completa.**

Per n = 1 , la **(1)** risulta veritiera; supposto la (1) vera per n bisogna dimostrare che è anche vera per n + 1 .

Per n + 1 la **(1)** diventa :

$$(n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n}(((n+1)^2 - (n+1) + 1) + 2k)$$

Infatti, partendo dal secondo membro, si ha:

$$\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}}\left(((\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}} - (\boldsymbol{n}+\mathbf{1}) + \mathbf{1}) + \mathbf{2}\boldsymbol{k}\right) = \sum_{k=0}^{n}(\,(n^2 + 1 + 2n - n - 1 + 1) + 2k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}((n^2 - n + 1) + 2n + 2k) + (n+1)^2 - (n+1) + 1 + 2n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}((n^2 - n + 1) + 2k) + \sum_{k=0}^{n-1}(2n + 2k) + n^2 + 1 + 2n - n - 1 + 1 + 2n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}((n^2 - n + 1) + 2k) + \sum_{k=0}^{n-1}(2n + 2k) + n^2 + 3n + 1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}((n^2 - n + 1) + 2k) + 2\sum_{k=0}^{n-1}(n + k) + n^2 + 3n + 1 =$$

$$= n^3 + 2n^2 + n^2 + 3n + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^{\mathbf{3}}\,.$$

(Si osservi che la prima sommatoria (quella in rosso), poiché la **(1)** è assunta vera per n, è uguale a n^3; la seconda sommatoria (quella in verde) è uguale a n^2 (per *k* che va da 0 a n-1, essa è uguale a n volte n in quanto n viene sommato n-1 volte più la prima volta in cui k=0)).

Vitto Giuseppe