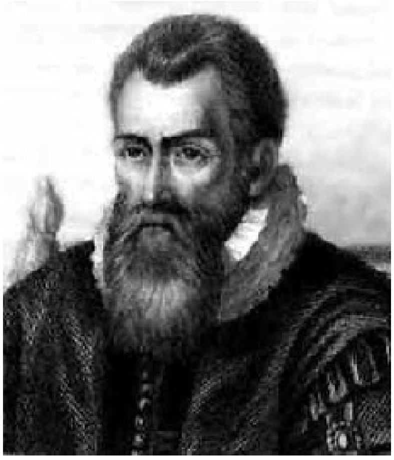
Logaritmi

Dal greco logos = discorso, ragionamento e arithmos = numero.

I logaritmi vennero scoperti dallo scozzese di nobile famiglia, **John Napier**, meglio conosciuto con il nome latinizzato di **Nepero**.

Aveva mostrato fin da bambino una spiccata attitudine per la matematica che, però, non sfruttò, preferendo gli studi teologici, per poi tornare a studiare la matematica.



Egli, infatti, non avrebbe mai pensato che il suo nome sarebbe rimasto legato all' invenzione dei logaritmi, uno strumento molto efficace per l' esemplificazione di alcuni calcoli.

Nacque nel castello di Merchiston nei pressi di Edimburgo (Scozia) il 1 febbraio del 1550. Partecipò attivamente alla lotta fra protestantesimo e cattolicesimo in difesa della Chiesa Anglicana.

Morì a Edimburgo il 4 Aprile del 1617.

Nepero fu colpito da un fatto curioso. Considerò due progressioni:

1° 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 (progressione aritmetica di ragione 1)

2° 1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 2048 4096 8192 (progressione geometrica di ragione 2)

Prendiamo due elementi della prima progressione 5 e 8 che occupano rispettivamente il 6° e il 9° posto, sommandoli otteniamo 13 che occupa il 14° posto.

Prendiamo due elementi della seconda progressione che corrispondono agli stessi posti 6° e 9°, cioè 32 e 256, moltiplicandoli otteniamo 8192 che occupa il 14°posto, lo stesso che occupa il 13.

Questo procedimento permette di trasformare le consuete operazioni di moltiplicazione e divisione in addizione o sottrazione.

Osserviamo la seconda progressione che si può anche scrivere:

$$\mathbf{2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^5 \quad 2^6 \quad 2^7 \quad 2^8 \quad 2^9 \quad 2^{10} \quad 2^{11} \quad 2^{12} \quad 2^{13}}$$

In ciascun elemento il due è la base, mentre gli esponenti sono gli elementi della prima progressione.

Perciò il **logaritmo** di un numero in una certa base è

l' _esponente a cui devo elevare la base_ a _per ottenere l' argomento_ b.

Consideriamo la seguente equazione

$$x^4 = 16 \rightarrow x = \sqrt[4]{16} = 2$$

(tralasciando la soluzione negativa -2 e quelle complesse).
Dunque, l'operazione inversa dell'elevamento a potenza è la radice.
Consideriamo, ora, l'equazione $2^x = 16$.

Questa equazione si dice esponenziale perché l'incognita compare come esponente. Qual è il valore di x che soddisfa l'equazione? In questo caso sappiamo che x=4 perché 2^4=16.
Se consideriamo l'equazione $3^x = 11$ la risposta sul valore di x diventa un po' complicata.
In generale un'equazione esponenziale si presenta nella forma tipica

$$a^x = b$$

Se ***a*** e ***b*** sono due numeri reali qualsiasi, niente e nessuno ci assicura sull'esistenza e sull'unicità della soluzione di una siffatta equazione.
Se invece facciamo delle restrizioni su **a** e **b , a>0** e **a ≠1 , b>0**, allora siamo certi che esiste ed è unica la soluzione dell'equazione.
A quest'unica soluzione si dà il nome di **logaritmo,** e si scrive

$$\log_a b = x$$

(si legge "logaritmo in base **a** di **b** è **x**").

Il logaritmo è l'esponente a cui si eleva la base a per ottenere b.

$$a^{\log_a b} = b$$

Dalla definizione si ha

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Le due uguaglianze sono equivalenti.

SEGNO DEL LOGARITMO

$\log_a b > 0$ se $b>1$;

$\log_a b < 0$ se $b<1$.

Non è superfluo osservare che

$$\log_a x < x^a < a^x$$

In matematica ogni operazione ha la sua inversa.

addizione → sottrazione
moltiplicazione → divisione

L'elevamento a potenza ne ha due di inverse, a seconda se si vuole conoscere la base oppure l'esponente:

- la radice
- il logaritmo

Esempio: $64 = 2^6$; si ha $\sqrt[6]{64}$ e $\log_2 64$.

La radice per ricavare la base: $64 = x^6$; il logaritmo per ricavare l'esponente: $64 = 2^x$.

Esistono infiniti sistemi di logaritmi, perché infinite sono le basi possibili.

I più utilizzati sono:

- quello a **base 10** o sistema dei logaritmi decimali (o di Briggs) → log

  Vengono utilizzati nelle scienze applicate e in ingegneria.

- quello a **base *e*** o numero irrazionale, detto naturale, (o di Nepero) → ln

  Il sistema di logaritmi neperiani sono diffusi in matematica e in fisica per la sua semplice derivata.

- quello a **base due**, detto binario: è usato in informatica.

Il valore di e è approssimato a 2,71828 → e = 2,71828.

Tuttavia, se a Nepero va il merito di aver scoperto il numero *e*, ad Eulero (1707-1783) va quello di averlo approfondito, indicandolo, appunto, con la lettera ***e***.

PROPRIETÀ

1) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$;

2) $\log_a b : c = \log_a b - \log_a c$;

3) $\log_a b^n = n \log_a b$;

4) $\log_a b^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log_a b$.

Cambiamento di base

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

E inoltre si ha ancora:
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Dalla definizione si hanno:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$

Anche se è stato detto che l'argomento b deve essere maggiore di 0 (b>0), possiamo osservare che

- $\log_a 0 = -\infty$. Infatti $a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$.

Qust'ultima proprietà torna utile in analisi.

A CHE COSA SERVONO I LOGARITMI

I logaritmi furono originariamente utilizzati per semplificare i calcoli dei numeri:l'elevamento a potenza e l'estrazione di radice si riducono a moltiplicazione e divisione e quest'ultime ad addizioni e sottrazioni. Oggi i calcoli sono eseguibili con le calcolatrici, per cui i logaritmi hanno perso la loro originaria funzione.

Tuttavia trovano ancora impiego in biologia, nell' astronomia (logaritmi stellari), nella scienza della Terra, nelle operazioni finanziarie.

Quando Nepero inventò i logaritmi i matematici contemporanei dissero che ***era stata loro regalata la metà della vita***: infatti l'occupazione principale dei matematici e soprattutto di quelli che si occupavano di astronomia ed astrologia era quella di calcolare la posizione dei pianeti, nel presente, nel passato e nel futuro e l'espressione "calcoli astronomici" non era certo un modo di dire.

I matematici possedevano le formule di prostaferesi che permettono di trasformare prodotti in somme e quindi di semplificare i calcoli, ma tali formule sono piuttosto complicate da applicare.
Con i logaritmi e' possibile trasformare prodotti in somme, quozienti in differenze, elevamenti a potenza in prodotti e calcoli di radici in quozienti, quindi tutte le operazioni vengono molto semplificate.

L'amico di Nepero, il matematico Henry Briggs (1561-1631), calcolò i logaritmi da 1 a 20.000 e da 90.000 a 100.000 con 14 cifre decimali. Di questo enorme lavoro di calcolo si avvalsero molti matematici ed astronomi come Keplero (1571-1630) per le sue famose leggi astronomiche.

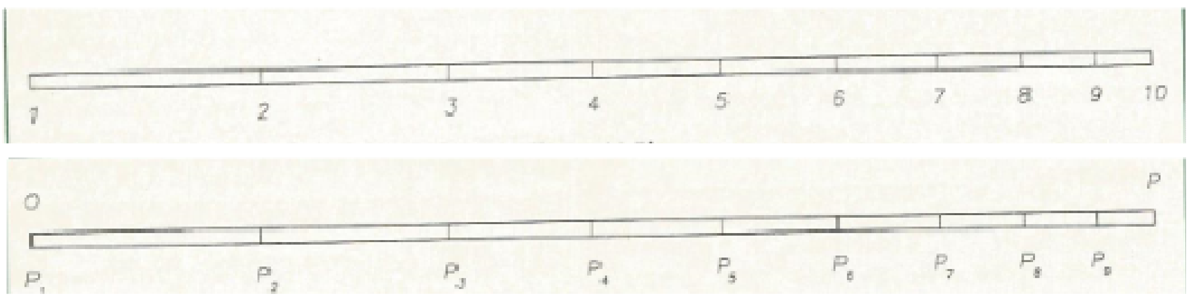
A questo aggiungiamo che i nostri sensi sono "logaritmici": se ad esempio ascoltiamo un suono e sentiamo poi un altro suono che ci sembra di intensità doppia, in effetti misurandolo ha intensità quattro volte superiore.

La stessa cosa se vediamo una luce ; se vediamo poi un'altra luce che ci sembra 3 volte più forte e misuriamo vediamo che e' 9 volte più forte; cioè i nostri sensi sono in scala logaritmica, cosa che ci permette di poter avere uno spettro di sensazioni molto più ampio di quello che avremmo se i nostri sensi fossero lineari.
Utilizziamo i logaritmi nella vita di tutti i giorni: un esempio di logaritmo l‘abbiamo notato dal gommista che misura la pressione di una gomma con uno strumento che non è lineare ma in scala logaritmica; anche le scale sulla macchina fotografica sono logaritmiche.

<u>SCALA LOGARITMICA</u>

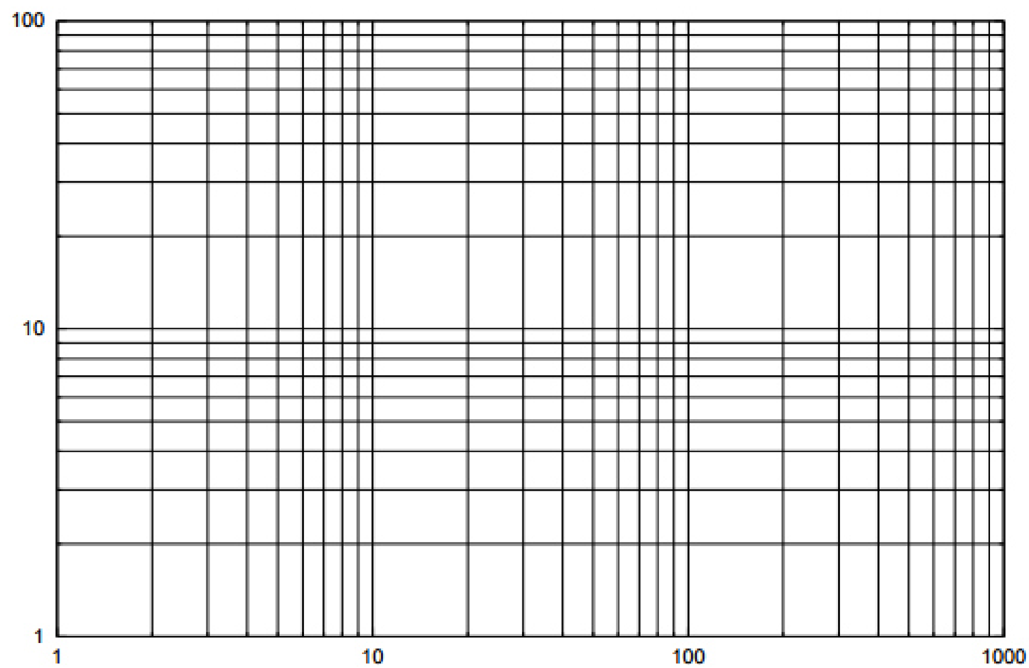
Oltre alle coordinate cartesiane e alle coordinate polari, esistono anche le coordinate logaritmiche.
Si considerano logaritmi decimali dei numeri interi da 1 a 10.
Log 1 = 0; log 2 = 0,30103; log 3 = 0,47712; log 4 = 0,60206; log 5 = 0,69897; log 6 = 0,77815; ….; log 10 = 1.

Fissato un segmento unitario **OP**, detto **modulo** o **unità** della scala logaritmica, si riportano su questo i punti, aventi l’ascissa, rispetto all’unità OP, a fianco indicata:
P_1(log 1); P_2(log 2); P_3(log 3); …..; P_9(log 9); P(log 10)
I punti vengono contrassegnati con i numeri 1, 2, 3, 4, …, 9, 10.
Si ha, cosi, una scala logaritmica.



Poi, si tracciano sul piano due assi fra loro perpendicolari, e si riportano su questi, a partire dall’origine e nel verso positivo, due scale logaritmiche.

Ogni punto del piano ha coordinate (k log x; k log y), dove k indica l’unità fissata uguale per entrambe le scale.



Qualche esempio
Rappresentiamo in coordinate logaritmiche la funzione

$$xy=6$$

Consideriamo i logaritmi decimali di entrambi i membri:

$$\log x + \log y = \log 6$$

che rappresenta una retta. Per x = 1 si ha log x = 0 da cui log y = log 6, cioè y = 6; per y = 1 si ha log y = 0, da cui log x = log 6 e quindi x = 6.
Riportiamo i punti (6,1) sull'asse orizzontale e (1,6) sull'asse verticale. Congiungiamo i due punti si ottiene un retta i cui punti hanno coordinate due numeri il cui prodotto è 6.

Tracciamo, in coordinate logaritmiche, il grafico della seguente trasformazione adiabatica:

$$p \cdot v^{\frac{1}{2}} = 3$$

I logaritmi di entrambi i membri sono

$$\log p + \frac{1}{2}\log v = \log 3$$

che rappresenta una retta. Si trovano due punti di essa e la si disegna.