

MATRICI E DETERMINANTI

§ 1. MATRICI

Si ha la seguente

Definizione 1: Un insieme di numeri, reali o complessi, ordinati secondo righe e colonne è detto **matrice** di ordine $m \times n$, ove m è il numero delle righe e n il numero delle colonne.

Una matrice di numeri viene indicata con una lettera maiuscola A oppure col simbolo $A_{m \times n}$ e scritta in generale nel modo seguente

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \dots & a_{3,j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{cases} i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, m \\ j = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n \end{cases}$$

dove i e j sono indici che indicano rispettivamente le righe e le colonne.

Il generico *elemento* della *matrice* $A_{m \times n}$ si indica con a_{ij}

La n -pla ordinata $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ si chiama **riga** i -esima. La m -pla ordinata $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ si chiama **colonna** j -esima.

Questi numeri (elementi di una matrice) sono rappresentati tutti da una stessa lettera minuscola $a_{i,j}$ munita di due indici, il primo dei quali indica la riga, i , mentre il secondo indica la colonna, j , a cui l'elemento appartiene. Esso occupa, dunque, la posizione individuata dall'intersezione tra la i -esima riga e la j -esima colonna della matrice. Per esempio l'elemento a_{32} occupa la posizione individuata dall'intersezione tra la terza riga e la seconda colonna della matrice.

Se il numero delle righe m è uguale al numero delle colonne n , cioè se $m = n$, allora la matrice si dice **quadrata** di ordine n (o m) con $n^2 = m^2$ elementi. Una matrice quadrata viene indicata brevemente nel modo seguente

$$A = (a_{ij}) \quad \text{con } i = j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Mentre la matrice è **rettangolare** di ordine $m \times n$ se $m \neq n$.

Esempi

a) di matrice rettangolare $A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad m = 2 \text{ e } n = 3$

b) di matrice quadrata $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}, \quad m = n = 3$

In una matrice quadrata si individua la **diagonale principale** e la **diagonale secondaria**.

La diagonale principale è formata dagli elementi

$$a_{11}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{nn};$$

mentre la diagonale secondaria dagli elementi

$$a_{n1}, \dots, a_{i,n-i+1}, \dots, a_{1n}.$$

1.1 MATRICE NULLA

Definizione 2: una matrice si dice **nulla** se ha nulli tutti i suoi elementi, e si scrive:

$$A = 0.$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 MATRICI DELLO STESSO TIPO

Definizione 3: due matrici A e B si dicono dello **stesso tipo** quando hanno lo stesso numero di righe e di colonne.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sono matrici dello stesso tipo } 3 \times 2$$

1.3 MATRICI CORRISPONDENTI

Definizione 4: in due matrici A e B dello stesso tipo, gli elementi di ugual posto si dicono **corrispondenti**.

Esempio

In $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ gli elementi corrispondenti sono a_{11} e b_{11} , a_{12} e b_{12} e così via.

1.4 MATRICI UGUALI

Definizione 5: due matrici dello stesso tipo, A e B , si dicono *uguali* quando tutti gli elementi corrispondenti sono uguali, e si scrive:

$$A = B$$

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ sono matrici uguali.

1.5 MATRICE RIGA

Definizione 6: si chiama *matrice* (o vettore) *riga* una matrice con un'unica riga, cioè una matrice di tipo $(1, n)$.

Esempio di matrice riga: $A = (1 \ 0 \ 4)$.

1.6 MATRICE COLONNA

Definizione 7: si chiama *matrice* (o vettore) *colonna* una matrice con un'unica colonna, cioè una matrice di tipo $(m, 1)$.

Esempio di matrice colonna: $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.7 MATRICE DIAGONALE

Definizione 8: una matrice quadrata A si dice *diagonale* quando tutti gli elementi sono uguali a zero tranne quelli che si trovano sulla diagonale principale.

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale 3×3 .

1.8 MATRICE DIAGONALE SUPERIORE

Definizione 9: una matrice quadrata A di ordine n si dice *triangolare superiore* se sono nulli tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale.

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice triangolare superiore.

1.9 MATRICE DIAGONALE INFERIORE

Definizione 10: una matrice quadrata A di ordine n si dice *triangolare inferiore* se sono nulli tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ è una matrice triangolare inferiore.}$$

Si osservi che una matrice diagonale è sia triangolare inferiore sia triangolare superiore.

1.10 MATRICE TRASPOSTA

Definizione 11: data una qualunque matrice A di ordine $m \times n$ si definisce *trasposta* di A e la si indica con A^T la matrice di ordine $n \times m$ ottenuta da A scambiando le righe con le colonne.

In altre parole la prima riga di A diventa la prima colonna di B , la seconda riga di A diventa la seconda colonna di B , e così via.

Esempi

$$\begin{array}{l} 1) \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ 2) \ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 2 \\ -3 & 1 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.11 MATRICE SIMMETRICA

Definizione 12: una matrice A di ordine $m \times n$ si dice *simmetrica* se $A = A^T$.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ sono uguali per cui } A \text{ è una matrice simmetrica.}$$

1.12 MATRICE IDENTICA

Definizione 13: una matrice quadrata A di ordine n si dice *identica* o *unitaria* quando tutti i suoi elementi sono nulli tranne gli elementi che si trovano sulla diagonale principale che sono tutti uguali a 1. La matrice identica viene indicata con I .

Ovviamente $\mathbf{A} \times \mathbf{I} = \mathbf{I} \times \mathbf{A} = \mathbf{A}$ per ogni matrice quadrata \mathbf{A} .

Esempio

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice identica I_3 di ordine 3 (diagonale principale con gli elementi uguali ad uno).

1.13 MATRICE INVERSA

Per le matrici quadrate si ha la seguente

Definizione 14: data una matrice \mathbf{A} di ordine n , se esiste una matrice \mathbf{B} di ordine n tale che
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times \mathbf{A} = \mathbf{I},$$
si dice che \mathbf{B} è la **matrice inversa** di \mathbf{A} .

§ 1.1 OPERAZIONI CON LE MATRICI DELLO STESSO TIPO

1.1.1 SOMMA

Per poter effettuare la somma fra matrici bisogna che queste siano dello stesso tipo, cioè che abbiano stesso numero di righe e di colonne.

Sia $A_{m \times n}$ l'insieme delle matrici $m \times n$. In esso viene definito l'operazione somma '+' nel modo seguente:

Alle matrici dello stesso tipo $\mathbf{A} = (a_{ij})$ e $\mathbf{B} = (b_{ij})$ si fa corrispondere la matrice $\mathbf{C} = (c_{ij} = a_{ij} + b_{ij})$

Vale a dire che gli elementi della matrice somma \mathbf{C} si ottengono sommando gli elementi corrispondenti delle due matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Esempio

Siano $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Si ha

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+4 & 0+2 \\ 4+6 & 3+(-1) & -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si osservi che la matrice somma \mathbf{C} è ancora dello stesso tipo di \mathbf{A} e di \mathbf{B} ; l'operazione somma '+' è, allora, interna all'insieme delle matrici dello stesso tipo $A_{m \times n}$.

PROPRIETA' DELLA SOMMA FRA MATRICI DELLO STESSO TIPO

1.1.1.1 Proprietà Commutativa

Siano \mathbf{A} e \mathbf{B} matrici $m \times n$ risulta $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

Esempio

Verifichiamo la proprietà commutativa rispetto alle matrici

Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ due matrici 2×3

$$\text{Risulta } A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+3 & 5-4 \\ 1+2 & 5+1 & 9+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 & 3+3 & -4+5 \\ 2+1 & 1+5 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

da cui $A + B = B + A$

1.1.1.2 Proprietà Associativa

Siano A, B, C matrici di dimensione $m \times n$ risulta

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Esempio

Verifichiamo la proprietà associativa rispetto alle seguenti matrici

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\text{Risulta } A + (B + C) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$(A + B) + C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

da cui $A + (B + C) = (A + B) + C$

1.1.1.3 Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma

Sia A una matrice $m \times n$, per la definizione 2 esiste la **matrice nulla**, che indichiamo con $\mathbf{0}$, di dimensione $m \times n$ avente tutti gli elementi uguali a zero, tale che

$$A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$$

la matrice nulla $\mathbf{0}$ è detta *elemento neutro* rispetto alla somma.

Esempio

Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e la matrice nulla di egual dimensione.

$$\text{Risulta } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.1.1.4 Esistenza dell'opposto

Per ogni matrice A di ordine $m \times n$ esiste una matrice denotata con $-A$, tale che $A + (-A) = 0$

$-A$ è detta **matrice opposta** di A e si ottiene da A cambiando ordinatamente di segno i suoi elementi

$$-A = (-a_{ij}) \quad \forall i, \forall j$$

Vale, dunque, la seguente

Definizione 15: data una matrice $A_{m \times n}$ di ordine $m \times n$, si dice **matrice opposta** di $A_{m \times n}$ la matrice $B_{m \times n}$ dello stesso ordine $m \times n$ tale che

$$A + B = B + A = 0,$$

dove con lo zero si intende la matrice nulla.

Inoltre

$$B = -A = (-a_{ij})$$

Da quanto detto sopra si ha che **l'insieme delle matrici $A_{m \times n}$ dotato dell'operazione interna '+', cioè $(A_{m \times n}, +)$, è una struttura di gruppo commutativo.**

Esempio

Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice opposta di A è data da

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Risulta

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

1.1.2 PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UNO SCALARE

Dato un numero reale k (detto scalare) ed una matrice $A = (a_{ij})$, si definisce prodotto della matrice A per lo scalare k la matrice indicata con kA il cui generico elemento è $k a_{ij}$, cioè kA si ottiene moltiplicando tutti gli elementi di A per k .

Si ha, dunque,

$$kA = (ka_{ij}).$$

Esempio

Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e lo scalare $k = 3$

$$k A = \begin{pmatrix} 3x1 & 3x4 & 3x2 \\ 3x0 & 3x(-2) & 3x1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $(-1)xA = -A$, ovvero il prodotto tra lo scalare -1 e la matrice A dà come risultato la matrice opposta di A .

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO PER UNO SCALARE

Anche nel caso del prodotto per uno scalare è immediato verificare le seguenti proprietà:

Per ogni matrice A, B di dimensione $m \times n$ e per ogni k, h numeri reali risulta

$$1.1.2.1) (k + h) A = k A + h A$$

$$1.1.2.2) k(A + B) = k A + k B$$

$$1.1.2.3) (k h) A = k (h A)$$

$$1.1.2.4) 1 A = A$$

Osservazione

- Essendo i **vettori** particolari matrici (con una sola riga e quindi del tipo $1 \times n$ oppure con una sola colonna del tipo $m \times 1$) valgono per essi le stesse operazioni con le relative proprietà.

- L'insieme delle matrici $m \times n$ dotato delle 2 operazioni di somma e prodotto per uno scalare con le relative proprietà è uno **spazio vettoriale**.

1.1.3 PRODOTTO TRA MATRICI

Per effettuare il prodotto tra due matrici è necessario che il numero delle colonne della prima sia uguale al numero delle righe della seconda. Vale a dire che se la matrice A è di ordine $m \times n$ allora la matrice B deve essere di ordine $n \times p$.

Sia A una matrice $m \times n$ e B una matrice $n \times p$, si ha la seguente

Definizione 16: si definisce **prodotto** tra le matrici A e B la matrice $C = A B$ il cui generico elemento c_{ij} è la somma dei prodotti degli elementi della i -esima riga di A per i corrispondenti elementi della j -esima colonna di B , ovvero

$$c_{ij} = \sum_{z=1}^n a_{iz} b_{zj}$$

il prodotto tra la i -esima riga di A e la j -esima colonna di B così definito è detto **prodotto scalare**.

La matrice prodotto C è di ordine $m \times p$, cioè ha tante righe quante sono le righe di A e tante colonne quante sono le colonne di B .

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Il prodotto tra matrici è anche detto *prodotto riga colonna*.

Esempio

Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ di ordine 3×2 e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ di ordine 2×4

Poichè A è di ordine 3×2 e B di ordine 2×4 è possibile eseguire il prodotto tra queste due matrici e l'ordine di $C = A B$ è 3×4 (il numero delle righe di A per il numero delle colonne di B).

Vediamo come si determina tale matrice. Calcoliamone tutti gli elementi.

L'elemento di posto c_{11} è dato dal prodotto scalare tra la prima riga di A e la prima colonna di B ovvero:

$$c_{11} = (2 \quad 1)x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x0 + 1x1 = 1$$

L'elemento di posto c_{12} è dato dal prodotto scalare tra la prima riga di A e la seconda colonna di B ovvero:

$$c_{12} = (2 \quad 1)x \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2x2 + 1x6 = 10$$

L'elemento di posto c_{13} è dato dal prodotto scalare tra la prima riga di A e la terza colonna di B ovvero:

$$c_{13} = (2 \quad 1)x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2x3 + 1x4 = 10$$

L'elemento di posto c_{14} è dato dal prodotto scalare tra la prima riga di A e la quarta colonna di B ovvero:

$$c_{14} = (2 \quad 1)x \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 2x5 + 1x(-1) = 9$$

L'elemento di posto c_{21} è dato dal prodotto scalare tra la seconda riga di A e la prima colonna di B ovvero:

$$c_{21} = (4 \quad 3)x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4x0 + 3x1 = 3$$

L'elemento di posto c_{22} è dato dal prodotto scalare tra la seconda riga di A e la seconda colonna di B ovvero:

$$c_{22} = (4 \quad 3)x \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 4x2 + 3x6 = 24$$

L'elemento di posto c_{23} è dato dal prodotto scalare tra la seconda riga di A e la terza colonna di B ovvero:

$$c_{23} = (4 \quad 3)x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 4x3 + 3x4 = 24$$

L'elemento di posto c_{24} è dato dal prodotto scalare tra la seconda riga di A e la quarta colonna di B ovvero:

$$c_{24} = (4 \quad 3)x \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 4x5 + 3x(-1) = 17$$

L'elemento di posto c_{31} è dato dal prodotto scalare tra la terza riga di A e la prima colonna di B ovvero:

$$c_{31} = (-2 \quad -1)x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2x0 + (-1)x1 = -1$$

L'elemento di posto c_{32} è dato dal prodotto scalare tra la terza riga di A e la seconda colonna di B ovvero:

$$c_{32} = (-2 \quad -1)x \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = -2x2 + (-1)x6 = -10$$

L'elemento di posto c_{33} è dato dal prodotto scalare tra la terza riga di A e la terza colonna di B ovvero:

$$c_{33} = (-2 \quad -1)x \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -2x3 + (-1)x4 = -10$$

L'elemento di posto c_{34} è dato dal prodotto scalare tra la terza riga di A e la quarta colonna di B ovvero:

$$c_{34} = (-2 \quad -1)x \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = -2x5 + (-1)x(-1) = -9$$

La matrice prodotto è

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 10 & 9 \\ 3 & 24 & 24 & 17 \\ -1 & -10 & -10 & -9 \end{pmatrix}$$

di ordine 3×4 .

Osservazione

Con riferimento alle matrici A e B dell'esempio precedente non è possibile effettuare il prodotto B A in quanto considerandone le dimensioni (2×4) e (3×2) il numero delle colonne di A non è uguale al numero delle righe di B.

Risulta in generale

$$\mathbf{AB \neq BA.}$$

Da ricordare:

- *Il prodotto tra matrici NON E' SEMPRE eseguibile*

- Se è possibile eseguire il prodotto $A B$ non è detto che si possa eseguire il prodotto $B A$ e quindi bisogna stare attenti all'ordine in cui si deve eseguire la moltiplicazione.
- Se due matrici sono quadrate e dello stesso ordine si può eseguire sia il prodotto $A B$ che il prodotto $B A$ ottenendo una matrice quadrata dello stesso ordine, anche in questo caso però il prodotto **non è in generale commutativo**.

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO TRA MATRICI QUADRATE

E' facile dimostrare, così come si è fatto più sopra, che nell' insieme delle matrici quadrate di ordine n , valgono le seguenti proprietà:

Proprietà associativa

$$A (B C) = (A B) C \quad \forall A, B, C$$

Esistenza dell'elemento neutro rispetto al prodotto

La matrice identica I di ordine n è l'elemento neutro rispetto al prodotto.

Risulta infatti

$$A I = I A = A \quad \forall A$$

Proprietà distributiva

$$A (B + C) = A B + A C \quad \forall A, B, C$$

§ 1.2 MINORE COMPLEMENTARE DI UNA MATRICE

Siano $m > 1$ ed $n > 1$; si fissi un elemento qualsiasi a_{ij} di una matrice A di ordine $m \times n$. Si ha la seguente

Definizione 17: si definisce *minore complementare* di a_{ij} , e lo si indica con M_{ij} , la matrice di ordine $(m-1) \times (n-1)$ che si ottiene da A escludendo tutti gli elementi della i -esima riga e della j -esima colonna.

Esempi:

$$1) A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{13} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ è il minore complementare di } a_{13}.$$

$$2) A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{22} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \text{ è il minore complementare di } a_{22}.$$

§ 1.3 COMPLEMENTO ALGEBRICO DI UNA MATRICE

Siano $m > 1$ ed $n > 1$; si fissi un elemento qualsiasi a_{ij} di una matrice A di ordine $m \times n$. Si ha la seguente

Definizione 18: Si definisce *complemento algebrico*, e lo si indica con A_{ij} , il minore complementare preso con il suo segno se la somma $i+j$ è pari e con il segno cambiato se la somma $i+j$ è dispari.

Esempio

$$\text{Sia } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & -4 & 3 \\ \frac{1}{3} & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ una matrice } 3 \times 3. \quad M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -1 - \frac{2}{9} = -\frac{11}{9},$$

$$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{11}{9} \text{ essendo } 2+2=4 \text{ pari,}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 5 \end{vmatrix} = -\frac{17}{3}, \quad A_{23} = -M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 5 \end{vmatrix} = \frac{17}{3} \text{ essendo } 2+3=5 \text{ dispari.}$$

§ 2. DETERMINANTI

Quando la matrice è **quadrata**, cioè risulta $m = n$, essa esprime un numero, o meglio ad una matrice quadrata si fa corrispondere un numero che viene detto *determinante* della matrice. Il *determinante* di una matrice viene indicato col simbolo $\det A$, oppure col simbolo $|A|$, e scritto nel modo seguente

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

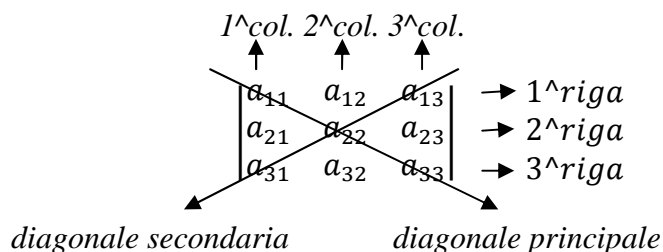
Si ha, dunque, la seguente

Definizione 19: Se una matrice A è quadrata allora ad essa viene associato un numero detto *determinante* di A e si denota con $\det A$ oppure con $|A|$.

Se $n=1$, cioè se $A = (a_{11})$, allora il numero a_{11} si dice *determinante* di A e si scrive

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

Di un determinante si individuano una **diagonale principale** e una **diagonale secondaria, righe** (1^a riga, 2^a riga e così via a partire dall'alto verso il basso) e **colonne** (1^a, 2^a colonna e così via a partire da sinistra a destra):



§ 2.1 CALCOLO DEI DETERMINANTI DI UNA MATRICE

Vediamo come si calcola il determinante di una matrice quadrata.

2.1.1 Determinante di matrice di ordine n = 2 (2x2).

Si ottiene effettuando la differenza tra il prodotto dei termini della diagonale principale e il prodotto dei termini della diagonale secondaria.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \times (-4) - (4) \times (5) = 8 - 20 = -12$$

2.1.2 Determinante di matrice di ordine n = 3 (3x3).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ci sono più modi per calcolare il determinante di una matrice 3x3.

1) Regola di SARRUS

Accanto al determinante della matrice quadrata A si scrivono le prime due colonne ottenendosi tre diagonali "principali" e tre diagonali "secondarie". Il numero che corrisponde al determinante è dato dalla differenza tra la somma dei prodotti dei termini di ciascuna diagonale principale e la somma dei prodotti dei termini di ciascuna diagonale secondaria.

La regola di Sarrus dice, passaggio per passaggio:

- Si fa il prodotto dei termini di ciascuna diagonale principale (tre prodotti: dall'alto verso il basso in diagonale)
- Si fa la somma dei tre prodotti delle diagonali principali

- Si fa il prodotto dei termini di ciascuna diagonale secondaria (tre prodotti: dal basso verso l'alto in diagonale)
- Si fa la somma dei tre prodotti delle diagonali secondarie
- **Si effettua la differenza tra la somma dei tre prodotti delle diagonali principali e la somma dei tre prodotti delle diagonali secondarie.**

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}xa_{22}xa_{33} + a_{12}xa_{23}xa_{31} + a_{13}xa_{21}xa_{32}) - (a_{13}xa_{22}xa_{31} + a_{11}xa_{23}xa_{32} + a_{12}xa_{21}xa_{33}).$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 6 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (0x(-3)x1 + (-1)x6x5 + 4x2x1) -$$

$$(4x(-3)x5 + 0x6x1 + (-1)x2x1) = (-30 + 8) - (-60 - 2) = (-22) - (-62) = 40$$

2) Regola con i complementi algebrici

Per calcolare il determinante di una matrice di ordine superiore al secondo si sceglie una linea (riga o colonna) e si fa la somma dei prodotti degli elementi della linea per i rispettivi complementi algebrici.

Riprendiamo la stessa matrice dell'esempio precedente $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Scegliamo la prima riga

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0x \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)x \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 4x \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 30 + 68 = 40$$

(è - perché -1 appartiene alla prima riga e alla seconda colonna per cui $1+2=3$ dispari)

(Tale prodotto non si intende scalare ma 4 moltiplicato per il complemento algebrico $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 17$ e quindi 68)

Il metodo con i complementi algebrici viene applicato alle matrici di ordine superiore a tre.

§3. ULTERIORI PROPRIETA' DELLE MATRICI

Si hanno, inoltre, le seguenti affermazioni di cui si omettono le facili dimostrazioni.

1. *Il determinante di una matrice unitaria è uguale a 1.*
2. *Il determinante di una matrice nulla è uguale a zero.*
3. *Il determinante di una matrice avente almeno una riga o almeno una colonna di elementi nulli è uguale a zero.*

4. *Il determinante di una matrice avente due righe di elementi uguali o proporzionali è uguale a zero.*
5. *Il determinante di una matrice avente due colonne di elementi uguali o proporzionali è uguale a zero.*
6. *Moltiplicando tutti gli elementi di una riga o di una colonna di una matrice per uno stesso numero reale k , il valore del determinante della matrice viene moltiplicato per k .*
7. *Moltiplicando tutti gli elementi di una matrice $n \times n$ per uno stesso numero reale k , il valore del determinante della matrice viene moltiplicato per k^n .*
8. *Scambiando tra di loro gli elementi di due righe o di due colonne di una matrice il valore del determinante cambia di segno.*
9. *Sostituendo gli elementi di una riga di una matrice con la somma degli elementi di questa riga con gli elementi corrispondenti di un'altra riga, il valore del determinante non cambia. Lo stesso accade per gli elementi di una colonna.*
10. *$\det(A^T) = \det A$*
11. *$\det(A \times B) = \det A \times \det B$*
12. *il determinante di una matrice triangolare (una matrice con tutti zero sopra o sotto la diagonale principale) è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale.*
13. *Lo stesso vale, ovviamente, anche per una matrice diagonale (ha elementi nulli sopra e sotto la diagonale principale).*