

Numero polo

Dato un numero di n cifre (con n che va da 2 a 5) tutte diverse tra loro, se ne scrive il rovescio (cioè dall'ultima cifra alla prima). Si fa la differenza tra il più grande e il più piccolo. Il risultato bisogna che sia ancora di n cifre; in caso contrario si cambia il numero n di partenza. Al numero che esprime la differenza si addiziona il suo rovescio. Il risultato finale è costante, qualsiasi sia il numero n . Tale costante viene detto **Numero Polo**.

Il numero polo dei numeri a due cifre è 99.

Esempio:

Sia $n=84$, il suo rovescio è 48. La differenza $84-48=36$. La somma tra 36 e il suo rovescio 63 è: $36+63=99$.

Numero polo dei numeri a tre cifre

Dato un numero n di tre cifre, se ne scrive il rovescio. Si effettua la sottrazione fra i due (dal più grande si sottrae quello più piccolo). Condizione: il risultato deve essere ancora un numero di tre cifre, in caso contrario si cambia il numero n . Al risultato ottenuto si addiziona il suo rovescio. Il risultato finale è costante, qualsiasi sia il numero n , e vale **1089**.

Esempio:

sia $n = 248$, il rovescio è 842 per cui $842 - 248 = 594$, il cui rovescio è 495. Allora $594 + 495 = 1089$.

Si propone una dimostrazione, generalizzando. Un numero di tre cifre in forma polinomiale si scrive

$$100x + 10y + z.$$

Il suo rovescio è

$$100z + 10y + x.$$

Si possono avere due casi:

1) $x > z$;

2) $x < z$.

Supponiamo, per fissare le idee, che $x > z$. Perciò n si scrive

$$100x + 10y + z > 100z + 10y + x.$$

Allora:

$$100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 99(x - z)$$

Siano, ora, le seguenti considerazioni :

Da $x > z$ segue che $x - z > 0$; ora $(x - z)$ è un numero che non può essere uguale a uno perché in tal caso $99(x - z) = 99$, che è un numero a due cifre, mentre, per la dimostrazione, occorre che sia un numero di tre cifre. Pertanto $(x - z)$ è un numero che va da 2 a 9. Osservo che $99(x - z)$ è un numero a tre cifre dove la seconda cifra è sempre 9 mentre la prima cifra sommata alla terza dà 9, cioè la prima cifra è complementare a 9 della terza (e viceversa).

Di qui posso scrivere:

$$99(x - z) = 100x' + 10 \cdot 9 + (9 - x'); \quad (1)$$

e di questo scrivo il rovescio:

$$100(9 - x') + 10 \cdot 9 + x'; \quad (2)$$

Faccio la somma tra la (1) e la (2):

$$100x' + 90 + 9 - x' + 900 - 100x' + 90 + x' = \mathbf{1089} \quad (3)$$

Analogo ragionamento si ha se $x < z$.

Numero polo dei numeri a quattro cifre

Provate a trovare il numero polo dei numeri di quattro cifre (tutte diverse!). Attenzione: la differenza tra il numero di partenza e il suo rovescio deve essere ancora un numero di quattro cifre, non necessariamente tutte diverse.

Ebbene, scoprirete che di risultati possiamo averne due: il numero **10890** oppure **9999**.

Esempi:

Sia $n=9874$, il rovescio è 4789. La differenza $9874-4789=5085$ il cui rovescio è 5805.

Allora $5085+5805=10890$.

Sia, ora, $n=4681$, il rovescio è 8164. La differenza tra il più grande e il più piccolo è $8164-4618=3546$, il cui rovescio è 6453. La somma fra questi ultimi è $3546+6453=9999$.

Come facciamo a sapere se è il numero polo è 10890 oppure 9999?

Ebbene, se le differenze tra l'ultima cifra e la prima e tra la terza e la seconda sono numeri

1) **CONCORDI** (nel senso che hanno lo stesso segno, entrambi positivi o negativi) allora il numero polo è **10890**;

2) **DISCORDI** (nel senso che hanno segno diverso, uno positivo e l'altro negativo) allora il numero polo è **9999**.

Infatti, nel primo esempio di sopra, per il numero 9874 la differenza tra l'ultima cifra 4 e la prima 9 è $4-9=-5$ negativo; la differenza tra la terza cifra 7 e la seconda 8 è $7-8=-1$ pure negativo. Dunque le due differenze sono numeri concordi. Pertanto il numero polo è 10890.

Inoltre, osserviamo che la differenza tra 9874 e il suo rovescio 4789 è $9874-4789=5085$. In quest'ultimo la prima cifra 5 e l'ultima 5 sono complementari a 10 ($5+5=10$), mentre la seconda cifra 0 e la terza 8 sono complementari a 8 ($0+8=8$).

Nel secondo esempio, per il numero 4681 la differenza tra l'ultima cifra 1 e la prima 4 è $1-4=-3$ negativo; la differenza tra la terza cifra 8 e la seconda 6 è $8-6=2$ positivo. Dunque le due differenze sono numeri discordi. Pertanto il numero polo è 9999.

Qui osserviamo che la differenza tra 4681 e il suo rovescio 1864 è $4691-1864=2817$. In quest'ultimo la prima cifra 2 e l'ultima 7 sono complementari a 9 ($2+7=9$), mentre la seconda cifra 8 e la terza 1 sono pure complementari a 9 ($8+1=9$).

Queste informazioni tornano molto utili nella dimostrazione seguente.

Dimostriamo l'esistenza di due numeri poli per i numeri di 4 cifre, che sono 9999 e 10890.

Partiamo dallo scrivere in forma polinomiale un numero di 4 cifre; si ha :

$$u + 10d + 100c + 1000m$$

Procediamo sottraendo il suo inverso:

$$u + 10d + 100c + 1000m - m - 10c - 100d - 1000u$$

Eseguendo i calcoli, e non conoscendo quale dei due numeri (scritti in forma polinomica) è maggiore rispetto all'altro, dobbiamo fare ricorso al valore assoluto della differenza per cui si ha :

$$| 999(m - u) + 90(c - d) | \quad (4)$$

La (4) rappresenta infatti la differenza tra un numero di 4 cifre e il suo inverso.

Per comodità indichiamo $(m - u)$ con s e $(c - d)$ con t , per cui la (4) si scrive

$$| 999s + 90t | \quad (5)$$

Sappiamo che s e t rappresentano numeri interi compresi nell'intervallo $[-8 ; 8]$.

Si possono avere i seguenti casi:

- Se s e t sono entrambi positivi, oppure entrambi negativi, cioè concordi nel segno, si ottiene sempre un numero di 4 cifre in cui le cifre intermedie (seconda e terza) sono complementari a 8, e le cifre esterne (prima e ultima) complementari a 10.
- Se s e t sono discordi si ottiene ancora un numero di 4 cifre in cui sia le cifre intermedie sia le cifre esterne sono complementari a 9.

Quindi la (4) può esprimere un numero in cui le cifre intermedie siano complementari a 8 e le cifre esterne siano complementari a 10. Oppure sia le cifre intermedie sia le cifre esterne siano complementari a 9.

Di conseguenza possiamo riscrivere la (4) nel seguente modo :

$$(10 - f) + 10(8 - g) + 100g + 1000f \quad (6)$$

dove f indica la cifra delle migliaia, g la cifra delle centinaia.

Oppure :

$$(9 - p) + 10(9 - q) + 100q + 1000p \quad (7)$$

dove p indica la cifra delle migliaia, q la cifra delle centinaia.

Se alla (6) sommiamo il suo rovescio e si eseguono i calcoli, si ottiene :

$$\begin{aligned} & (10 - f) + 10(8 - g) + 100g + 1000f + f + 10g + 100(8 - g) + 1000(10 - f) = \\ & = 10 - f + 80 - 10g + 100g + 1000f + f + 10g + 800 - 100g + 10000 - 1000f = \mathbf{109890} \end{aligned}$$

Procedendo analogamente per la (7), si ottiene:

$$\begin{aligned} & (9 - p) + 10(9 - q) + 100q + 1000p + p + 10q + 100(9 - q) + 1000(9 - p) = \\ & = 9 - p + 90 - 10q + 100q + 1000p + p + 10q + 900 - 100q + 9000 - 1000p = \mathbf{99099} \end{aligned}$$

Ricapitolando dunque :

Se le differenze tra l'ultima cifra e la prima e tra la quarta e la seconda sono numeri

- 1) **CONCORDI** (nel senso che hanno lo stesso segno, entrambi positivi o negativi) allora il numero polo è **109890**;
- 2) **DISCORDI** (nel senso che hanno segno diverso, uno positivo e l'altro negativo) allora il numero polo è **99099**.

Numero polo dei numeri a cinque cifre

Anche per i numeri a cinque cifre ci sono due numeri polo: il 109890 e il 99099. Per sapere a priori quale dei due sarà il numero polo, applichiamo le due regole di cui sopra per i numeri a quattro cifre.

Tralasciando la cifra centrale, se le differenze tra l'ultima cifra e la prima e tra la quarta e la seconda sono numeri

- 1) **CONCORDI** (nel senso che hanno lo stesso segno, entrambi positivi o negativi) allora il numero polo è **109890**;
- 2) **DISCORDI** (nel senso che hanno segno diverso, uno positivo e l'altro negativo) allora il numero polo è **99099**.

Esempi

Sia $n=68423$. La differenza tra l'ultima cifra e la prima è $3-6=-3$, negativa; mentre la differenza tra la quarta cifra e la seconda è $2-8=-6$, negativa. Le due differenze sono numeri entrambi negativi e quindi concordi nel segno. Il numero polo è, allora, 109890. Infatti, il rovescio del numero di partenza 68423 è 32486. La

differenza fra i due è $68423-32486=35937$ che sommato al suo rovescio 73953 dà come numero polo 109890 .

Sia, ora $n=27546$. La differenza tra l'ultima cifra e la prima è $6-2=4$, positiva; mentre la differenza tra la quarta cifra e la seconda è $4-7=-3$, negativa. Le due differenze sono numeri discordi nel segno. Il numero polo è, allora, 99099 . Infatti, il rovescio del numero di partenza 27546 è 64572 . La differenza fra i due è $64572-27546=37026$ che sommato al suo rovescio 62073 dà come numero polo 99099 .