

Prodotti notevoli

Moltiplichiamo due polinomi tra loro applicando la proprietà distributiva più volte:

$$\begin{aligned}(2x^2 - x + 3)(-4x + 3) &= (2x^2 - x + 3)(-4x) + (2x^2 - x + 3)(3) \\ &= 2x^2(-4x) + (-x)(-4x) + 3(-4x) + 2x^2 \cdot 3 + (-x) \cdot 3 + 3 \cdot 3 \\ &= -8x^3 + 4x^2 - 12x + 6x^2 - 3x + 9.\end{aligned}$$

Ricaviamo la regola che

Il prodotto di due polinomi si ottiene moltiplicando ciascun monomio del primo polinomio per ogni monomio del secondo polinomio.

Moltiplichiamo, ora, questi altri due polinomi:

$$(x + 3)(x - 3)$$

Applicando quanto sopra detto si ha

$$x^2 - 3x + 3x - 9 = x^2 - 9$$

Ci si accorge che il risultato si ottiene più rapidamente facendo la sottrazione tra i quadrati dei due termini. Si parla allora di prodotto che già si conosce detto, appunto, **notevole**.

Ci sono, dunque, prodotti fra polinomi i cui risultati sono **noti**. Questi risultati vanno, però, imparati e ricordati. I prodotti notevoli in forma generale sono i seguenti:

1. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
2. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
3. $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
6. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
7. $(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$
8. $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$
9. $(A + B + C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3A^2B + 3AB^2 + 3A^2C + 3AC^2 + 3B^2C + 3BC^2 + 6ABC$

Qui sono state usate le lettere maiuscole A, B, C perché esse possono rappresentare

- non solo singole lettere o numeri

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

- anche monomi formati da più lettere con coefficiente numerico

$$(3xy + 2z)^2 = 9x^2y^2 + 12xyz + 4z^2$$

- ed anche polinomi

$$\begin{aligned}((x - 1) + (2y - z))^2 &= (x - 1)^2 + 2(x - 1)(2y - z) + (2y - z)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + 2(2xy - xz - 2y + z) + 4y^2 - 4yz + z^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + 4xy - 2xz - 4y + 2z + 4y^2 - 4yz + z^2\end{aligned}$$