# *Concetto di area* (misura).

A volte parliamo di oggetti in matematica senza conoscerne l'esatta definizione. Proviamo a capire di più il concetto di **area** (intesa come **misura**).
Euclide non ha mai dato una definizione di area né di una sua misura. Enunciò alcune "nozioni comuni" dalle quali si deducono le seguenti proprietà:

1$^a$) della <u>INVARIANZA</u>: superfici uguali hanno aree uguali;

2$^a$) della <u>ATTIVITA'</u> <u>FINITA</u>: sommando fra loro un numero finito di superfici si ottiene una superficie che ha un'area pari alla somma delle aree di quelle;

3$^a$) della <u>MONOTONICITA'</u>: una superficie contenuta in un'altra ha un'area minore o uguale di questa.

In base a queste proprietà è possibile assegnare un'area ad ogni poligono:

a) dividendo(scomponendo) il poligono in tanti triangoli;
b) calcolando l'area di ciascun triangolo;
c) sommando le loro aree;

Il fatto è che Euclide non dimostrò in modo rigoroso (in verità non dimostrò in alcun modo) che l'area di triangolo non dipende dalla <u>scelta</u> della base e dell'altezza, e che l'area di un poligono non dipende dal modo con cui si viene scomposto in triangoli. Per una rigorosa sistemazione della geometria euclidea dobbiamo aspettare il 1899, anno in cui **David Hilbert** pubblicò i "*Fondamenti della geometria*" ("Grundlagen der Geometrie").
A tale proposito è interessante riportare il teorema pubblicato nel 1833 da **Janos Bolyai**:

**" Due poligoni che hanno la stessa area si possono decomporre in un numero finito di triangoli equivalenti"**

In particolare ogni poligono si può "quadrare", cioè si può scomporre in un numero finito di triangoli che ricomposti costituiscono un quadrato.
Questo nel piano. E nello spazio? Vale un teorema analogo a quello di Bolyai? È possibile, cioè, decomporre un poliedro in un numero finito di tetraedri di modo che ricomposti diano un cubo con lo stesso volume? ( questo rappresenta il "<u>terzo problema</u> di Hilbert"). La risposta fu data da **Max Dehn**, il quale dimostrò che non è possibile nemmeno per i tetraedri stessi.

## Nozione generale di Peano-Jordan (circa la misura).

Venne spontaneo porsi il problema (siamo già alla fine dell'800) di come calcolare l'area di una superficie il cui bordo è curvilineo. Nel 1887 **Giuseppe Peano** e poi nel 1893 **Camille Jordan** introdussero la seguente nozione generale:

*Data una figura curvilinea, la sua area può approssimarsi mediante poligoni, sia dall'interno, sia dall'esterno. Essa è compresa tra le aree di queste approssimazioni, e se queste tendono ad uno stesso limite, allora l'area della figura curvilinea coinciderà con questo limite.*

A tale proposito è opportuno ricordare:

1) Metodo di esaustione: usato prima da **Eudosso** (IV sec.a.C.) e poi da **Archimede** nel 225 a.C., per calcolare l'area del cerchio e la superficie della sfera.

2) L'integrale di RIEMANN (mediante rettangoli): introdotto da **Bernhard Riemann** nel 1854, che permette di calcolare l'area di una figura curvilinea il cui bordo sia delimitato da funzioni continue.

In realtà dal '600 all'800 si dava per scontato l'esistenza dell'area di una superficie e l'integrale era uno strumento per calcolarla.

3) **A. Cauchy** nel 1823 pensò bene di definire l'area come l'integrale stesso.

Ma questo non bastò finché c'erano funzioni che non erano integrabili ( si pensi alle funzioni con infinite discontinuità). Ci si accorse che era necessario precisare una misura dell'insieme di discontinuità. La nozione di Peano-Jordan non era più sufficiente.

4) Ci pensò nel 1902 **H. Lebesgue** con il concetto di "*misura di Lebesgue*".

L'additività finita di Euclide fu sostituita con l'additività numerabile:

"S*ommando fra loro una quantità numerabile di superfici dà una superficie con un'area uguale alla somma delle aree di quelle*".

Oggi i matematici considerano una superficie dotata di area quand'essa è misurabile secondo Lebesgue. L'integrale di Riemann è un caso particolare della nozione di misura secondo Peano-Jordan; l'integrale di Lebesgue è un caso particolare della misura di Lebesgue.

5) Ne deriva che ci sono funzioni integrabili secondo Riemann che sono integrabili anche secondo Lebesgue. Mentre ci sono integrali di Lebesgue che non lo sono di Riemann.

Dunque la nozione di misura di Lebesgue **è più generale** rispetto a tutte le definizioni precedenti.

(Da "La matematica del novecento " di P. Odifreddi - PBE Scienza).

.

***N. Filipponio***