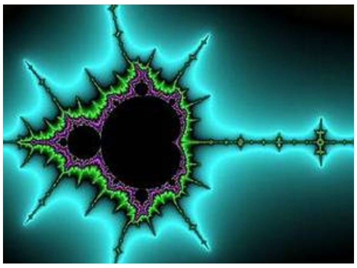


1. FRATTALI

" La matematica è lo specchio della realtà e della vita " (H. Steinhaus).

Euclide ci ha insegnato che gli oggetti hanno dimensione 1 oppure 2 oppure 3. La retta ha dimensione 1, le figure nel piano hanno dimensione 2, i solidi nello spazio hanno dimensione 3.
Ci si chiede: un albero di ulivo che dimensione ha ? E' sufficiente affermare che esso ha dimensione 3 solo perché occupa un " volume "? Ancora: le nuvole che dimensione hanno ? E una spugna ? E un banco di coralli marini ? La costa italiana, e in particolare quella pugliese, che dimensione ha ? Sorge qualche incertezza nel dare la risposta. Ci sono, in verità, molti oggetti matematici che non hanno nessuna dimensione fra quelle euclidee.
In natura gran parte dei fenomeni complessi, come il moto turbolento di un fluido, la formazione delle catene montuose non trova un'adeguata risposta applicando il modello geometrico euclideo. Il matematico **Benoit Mandelbrot** (dal Thomas J. Watson Research Center della IBM a Yorktown Heights, nello stato di New York) nel 1975 ha pubblicato un libro, poi riproposto con una specifica edizione italiana nel 1984, intitolato " Gli oggetti frattali "con un sottotitolo molto significativo " **Forma**, **caso e dimensione** " nel quale espone un'originale teoria per lo studio di oggetti e di forme irregolari che sono stati chiamati **FRATTALI**, appunto dal latino "fractus "che significa " interrotto ", " irregolare ".
Ma che cosa sono, in effetti, i frattali ? Soffermiamoci di nuovo sul concetto di **DIMENSIONE**, che d'ora in avanti verrà indicata con **D**; per la geometria di Euclide gli oggetti hanno dimensione abituale 1, o 2, o 3. In altri termini una delle caratteristiche principali è la dimensione. Per gli oggetti che non si riconoscono in nessuna delle tre dimensioni euclidee, e che quindi sono per così dire irregolari, si introduce la "***dimensione frattale***”, cioè quella caratteristica che misura il grado di irregolarità e di interruzione dell'oggetto. Si scopre che la dimensione frattale così intesa ha valori frazionari, irrazionali come lg 4 / lg 3. Torna comodo pensare e affermare che la dimensione frattale di certe curve piane (di Peano,di Koch) molto irregolari è un valore compreso tra 1 e 2, che quella di certe superfici è un valore compreso tra 2 e 3.
Si potrebbe dire, a questo punto, che frattali sono oggetti che hanno dimensione compresa tra O e 3, estremi inclusi per la semplice ragione che esistono frattali di dimensione O (Spugna di Sierpinski a volume zero), oppure 1 o 2. Allora la dimensione frattale assume un significato più estensivo che comprende anche il concetto di dimensione abituale di Euclide. Dunque la dimensione frattale esprime la dimensione fisica degli oggetti. Volendo essere più pignoli, da un punto di vista epistemologico si può dire che c'è uno stretto rapporto tra oggetto e osservatore e dal modo con cui si instaura tale rapporto dipende un risultato numerico. Per una formica un granello di sabbia ha dimensione 3, per l'uomo è privo di dimensione (secondo l'abituale geometria). Supponiaino che ci sia un unico osservatore e un gomitolo di 10 cm di diametro, fatto di filo di 1 cm di spessore. Analizziamo le seguenti situazioni:

a) L'osservatore posto a 10 m di distanza dal gomitolo; lo vede come un punto e quindi con dimensione zero.

b) L’osservatore si pone ad una distanza di 1 m dal gomitolo; lo vede come una sfera e quindi con dimensione tre.

c) L'osservatore si pone ad una distanza molto ravvicinata al gomitolo e supponiamo che lo veda con una lente di ingrandimento; perde di vista l'insieme e focalizza un insieme di fili, dunque una figura con dimensione 1.

d) Aumentiamo la potenza della lente di modo che l'osservatore abbia l'impressione di essere ancora più vicino con l'occhio al gomitolo rispetto alla situazione precedente, l'osservatore vedrà ogni filo come una specie di colonna e quindi il tutto torna ad avere dimensione tre.

e) Con un grado di risoluzione maggiore della lente ogni filo-colonna si presenta in fibre filiformi e il tutto riacquista la dimensione 1.

f) Se si aumenta il grado di risoluzione si incomincia a intravedere la struttura atomica di ogni fibra filiforme.

E cosi via. Si intuisce che il valore della dimensione del gomitolo di partenza oscilla continuamente tra i vari valori. Ebbene gli oggetti in natura subiscono, per cosi dire, un continuo cambiamento di differenti dimensioni (mi torna in mente " Alice nel paese delle meraviglie "di Carrol nell'ottima traduzione in italiano di Aldo Busi); << il fatto nuovo sarà che là dove finora non si vedevano che zone di transizione, prive di una struttura ben determinata, io identifico oggi delle zone frattali, la cui dimensione è vuoi una frazione, vuoi un intero " anormale ", descrittivo a sua volta di uno stato irregolare o interrotto>> D. (B. B. Mandelbrot "**Gli oggetti fiattali** "Einaudi Paperbacks 173 pag.16 Edizione del 1987). Ecco che invenzione la teoria di Mandelbrot ampiamente riportata nei suoi scritti ed in particolare nel suo " **The fractal geormetry of Nature** "del 1982, che introduce dei " termini correttivi " per la scelta di un opportuno modello geometrico interpretativo del pezzo di realtà che si sta osservando al fine di ridurre, quasi annullandole, le correzioni.
Possiamo, dunque, affermare che, inteso il grado di risoluzione come l'unità dimensionale di riferimento, ogni oggetto " assume " diverse dimensioni a seconda del grado di risoluzione dell'osservatore.
Molti oggetti in natura non possono essere studiati e interpretati con il consueto modello della geometria classica. Si pensi agli oceani, al moto ondoso delle acque, alle montagne, all'atmosfera, al cielo, agli stessi pianeti osservabili. Se poi spaziamo nelle altre discipline scientifiche si pensi << alla distribuzione degli errori su certe linee telefoniche>> che si rivela uno strumento di transizione come pure all' <<articolazione di molecole organiche nei sapori>>. Si è stabilito che tale articolazione è espressa da un esponente di similitudine e tale esponente è una dimensione frattale.
Pertanto per certi fenomeni e oggetti in natura, i quali sono formati da molte parti distinte articolate tra loro, <<**la dimensione frattale descrive un aspetto di questa regola di articolazione** >>.

2. <u>**DIMENSIONE DI UN FRATTALE**</u>

Abbiamo già detto che le curve che si incontrano usualmente in geometria (e fra queste ovviamente la retta) sono unidimensionali; le superfici solide sono bidimensionali, mentre i solidi geometrici sono tridimensionali. Per l'uomo comune l'universo è tridimensionale. Già A. Einstein pensò negli anni cinquanta ad un universo a quattro, e poi, a cinque dimensioni. I fisici attualmente ipotizzano un universo a undici dimensioni (infilandoci fra queste oltre alle dimensioni geometriche solite anche la gravità, il tempo, il magnetismo, alcune forze atomiche deboli e così via). I matematici non hanno difficoltà a lavorare con spazi a n dimensioni, e queste sono tutte numeri interi. Nella geometria classica la dimensione è legata al concetto di direzione. Sulla linea unidimensionale ci si muove in modo unidirezionale, sulle superfici bidimensionali in modo bidirezionale, e nello spazio tridimensionale in modo tridirezionale (un uccello nell'aria). Ci sono oggetti rappresentati da curve-limite che non sono unidimensionali, nel senso che la direzione di percorrenza cambia un numero infinito di volte. Si pensi alla curva di Koch. Allora è necessario pervenire al concetto di dimensione introducendo una caratteristica degli oggetti che .non abbia nulla a che fare col concetto di direzione: questa caratteristica è la **AUTOSOMIGLIANZA** nel senso che le parti, in scala ridotta, sono simili al tutto.

Siano degli esempi per chiarire:

Intanto indichiamo con **D** la dimensione di una figura, con **N** il numero delle parti in cui dividiamo la figura, e con **r** il rapporto di similitudine tra l'intera figura e ogni singola parte.

a) Consideriamo una linea retta e la dividiamo in N parti tutte uguali ciascuna delle quali misura **1/N** rispetto all'intera lunghezza, quindi il rapporto di similitudine tra . l'intera lunghezza e una sua parte è N.

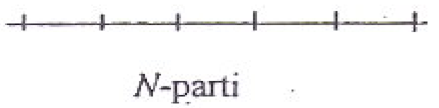


fig.1

b) Consideriamo un rettangolo A di lunghezza a e larghezza b e dividiamo sia a sia b in k parti (vedi figura), ottenendosi così N = k x k = k^2 parti (nel nostro.caso k = 4 e quindi le parti sono N = 4^2 = 16) tutte copie più piccole (autosimili) del tutto:

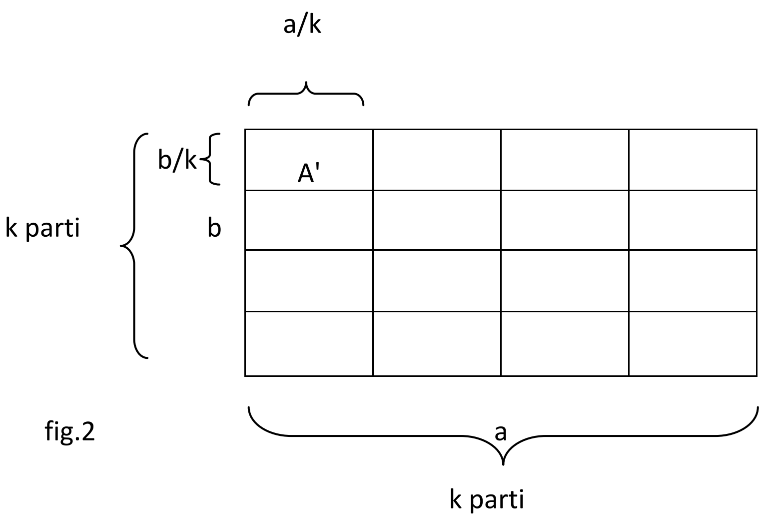


fig.2

Calcoliamoci l'area di una parte:

$$A' = \frac{b}{k} x \frac{a}{k} = \frac{ab}{k^2}$$

mentre l'area del tutto è

A = a b

Pertanto il rapporto di superficie è

$$r^2 = \frac{A}{A\prime} = \frac{ab}{\frac{ab}{k^2}} = ab\ x\ \frac{k^2}{ab} = k^2$$

Se si vuole il rapporto lineare r, allora

$$\boldsymbol{r = \sqrt{N} = \sqrt{k^2} = k}$$

c) Consideriamo un solido, per esempio un parallelepipedo di lunghezza a, di larghezza b e di altezza c e dividiamo a, b e c in k segmenti, ottenendosi così $N = k \times k \times k = k^3$ parti tutte copie più piccole del tutto (N parallelepipedi più piccoli simili al parallelepipedo grande).
Calcoliamoci il volume di una parte:

$$\boldsymbol{V' = \frac{a}{k} x \frac{b}{k} x \frac{c}{k} = \frac{abc}{k^3}}$$

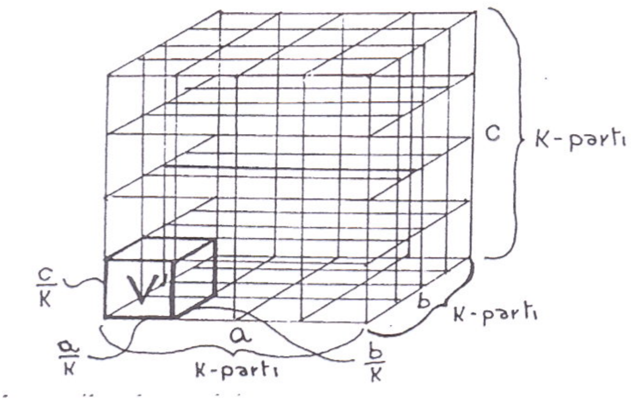


fig.3

Mentre il volume del parallelepipedo grande è

V = abc

Il rapporto di volume è, dunque

$$\boldsymbol{r^3 = \frac{V}{V'} = \frac{abc}{\frac{abc}{k^3}} = abc\ x\ \frac{k^3}{abc} = k^3}$$

Mentre il rapporto lineare è dato da

$$\boldsymbol{r = \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{k^3} = k}$$

e k è proprio il numero per il quale abbiamo diviso sia a sia b e sia c del parallelepipedo.
A questo punto la geometria classica ci suggerisce di generalizzare e affermare che il rapporto lineare di similitudine è dato dalla relazione

$$\boldsymbol{r = \sqrt[D]{N}}$$

Pertanto nel caso di:

a) linea retta: D = 1

$$\boldsymbol{r = \sqrt[1]{N} = N;}$$

b) rettangolo: D = 2

$$\boldsymbol{r = \sqrt{N} = \sqrt{k^2} = k;}$$

c) parallelepipedo: D=3

$$\boldsymbol{r = \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{k^3} = k.}$$

2.1. Curva di Koch e relativa dimensione

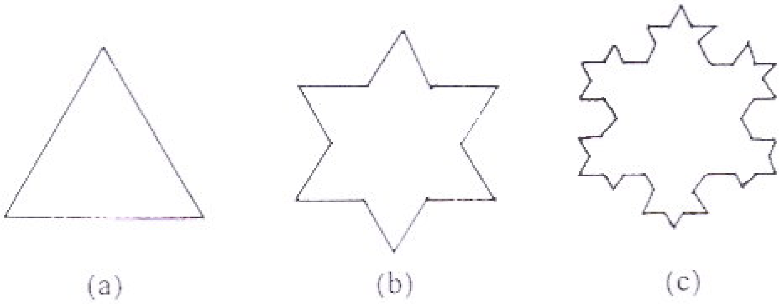
Vediamo di usare la relazione euclidea

$$\boldsymbol{r = \sqrt[D]{N}}$$

(che lega il rapporto lineare di similitudine, la dimensione D della figura e N il numero delle parti in cui viene divisa la figura) a certe curve come quella di Koch.

Intanto vediamo che cosa è la curva di Koch. Helge Von Koch studiò per la prima volta nel 1904 una figura geometrica il cui contorno fu chiamato, in suo onore, curva di Koch mentre la figura assunse il nome di " fiocco di neve " o " isola di Koch ".

Sia un triangolo equilatero e dividiamo ciascun lato in tre parti, sostituiamo la parte centrale con un picco a forma di triangolo equilatero di lato uguale alla parte sostituita (cioè a 1/3). Ogni lato del triangolo di partenza è costituito in tal modo da una spezzata di 4 parti uguali (vedi fig.4-b).



$D = \log_3 4 \sim 1,26$

fig.4

Su ogni parte di ciascun nuovo lato del triangolo effettuiamo la stessa operazione: dividiamo ancora in tre parti e sostituiamo la parte centrale con un picco a forma di triangolo equilatero di lato uguale alla parte sostituita. Ripetiamo l'operazione di divisione in tre parti con sostituzione di quella centrale con un picco infinite volte. Si ottiene così una figura geometrica a forma di fiocco di neve il cui contorno si dice curva di Koch e l'area di piano da essa racchiusa si dice isola di Koch(vedi fig. 5).

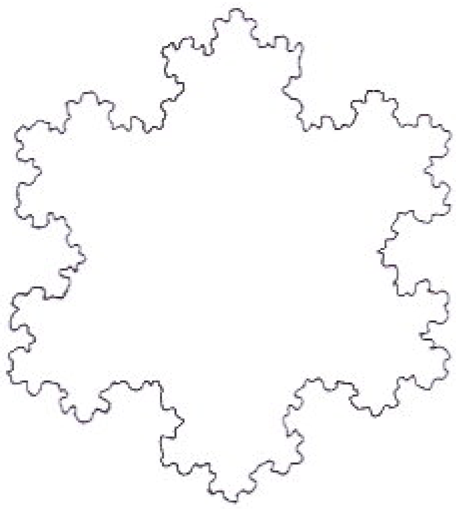
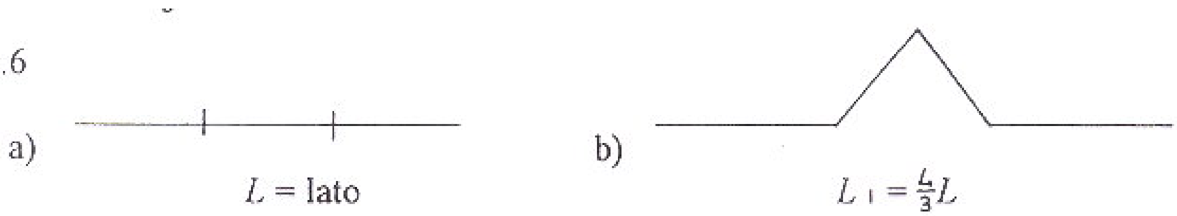


fig.5

L'isola di Koch

Mentre l'isola di Koch occupa nel piano un'area ben definita e vale esattamente **1,6** volte l'area del triangolo di partenza, il perimetro invece appare di lunghezza infinita perché a ciascun passo successivo del processo aumenta di 4/3 volte e così per gli infiniti passi. Infatti già il 1° passo, indicato con L il lato del triangolo, dà $L_1 = \frac{4}{3}L$

fig.6



per cui il perimetro, che era 3L , diventa

$$3L_1 = 3L\,x\,\frac{4}{3}$$

Al secondo passo

$$L_2 = \frac{4}{3}L\,x\,\frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 L$$

e quindi

$$3L_2 = 3L\,x\left(\frac{4}{3}\right)^2$$

In generale è facile convincersi che

$$3L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n x\,3L$$

e per n →∞ la lunghezza del perimetro appare infinita. Ci si chiede come mai una figura del piano di area finita possa avere uii perimetro infinito. Focalizziamo la nostra attenzione a quello che accade su un lato del triangolo (vedi fig.4). La deformazione del lato avviene infinite volte e per ogni volta accade che N = 4 e r = 3 (cioè il numero delle parti in cui viene diviso il tutto è 4 e il rapporto di similitudine è 3). Poiché ciò è vero per qualunque tratto del triangolo deformato, sarà vero per l'intera curva di Koch.
Applichiamo ora la relazione

$$r = \sqrt[D]{N}$$

e scopriamo che, per r = 3 e N = 4

$$3 = \sqrt[D]{4}$$

da cui, facendo ricorso ai logaritmi, si ricava

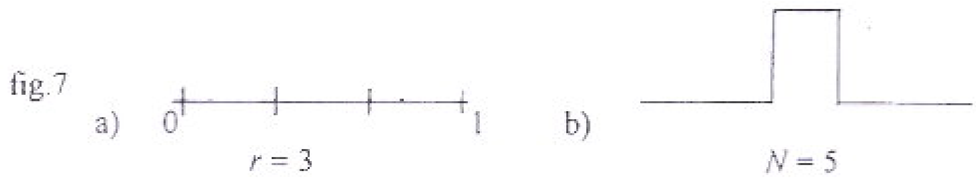
$$D = \frac{log4}{log3} = 1,2618$$

E' intervenuta una nuova dimensione **D = 1,2618** che è diversa da quelle solite euclidee.
Mandelbrot chiamò queste figure con dimensione frazionaria e comunque diversa da 1, da 2 e da 3, **FRATTALI**. La geometria frattale studia questi oggetti. Ci sono moltissimi altri oggetti creati, per così dire, artificialmente dall'uomo, che sono frattali.

Tutti i frattali studiati da Mandelbrot sono **AUTOSIMILI** e rappresentano figure bellissime e perfettamente simmetriche e l'intero, rispetto ad una sua parte, mantiene uno stesso rapporto di similitudine.
Ma la cosa più straordinaria è che lo sviluppo, per via matematica, di tali figure è prevedibile (ciò non accade nei frattali reali come le coste, le montagne e così via).
Questa prevedibilità è dovuta all'**autosomiglianza** dei frattali in esame; autosomiglianza per cambiamenti di scala e per traslazioni (invarianti per trasformazioni lineari).

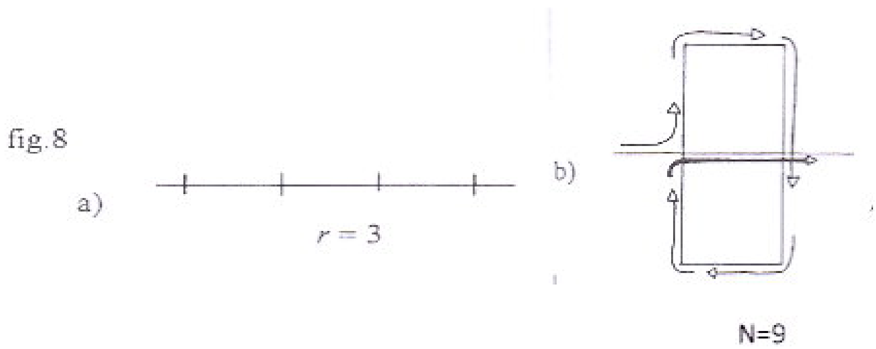
2.2. Altri esempi di frattali

2.2.1. La greca

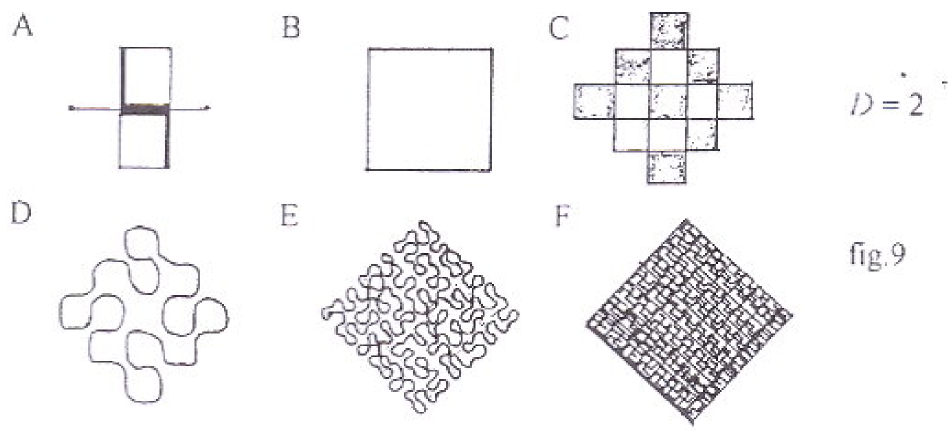


$$\boldsymbol{R = \sqrt[D]{N} \to 3 = \sqrt[D]{5} \to D = \frac{log5}{log3} \sim 1,465}$$

2.2.2. Curva di Peano



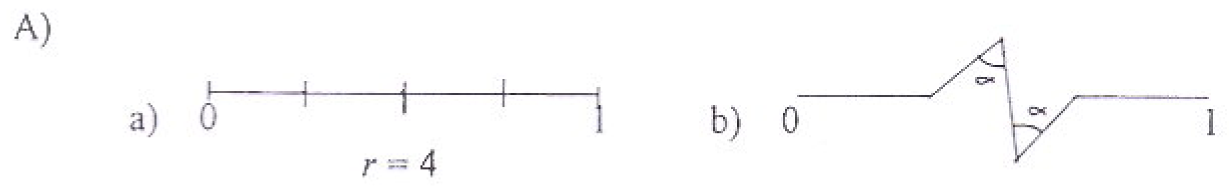
Ripetendo infinite volte la stessa operazione, come in fig.9, si ottiene una curva limite che, pur essendo in relazione continua tra il contorno del quadrato iniziale e la parte di piano delimitata dal quadrato finale, non è in corrispondenza biunivoca. La curva di Peano ricopre interamente il piano, per tale motivo la sua dimensione frattale risulta **2**. Attenzione ai punti doppi ! La loro presenza rende discutibile la definizione di dimensione di omotetia interna.



3. Generalizzazione della curva di Koch

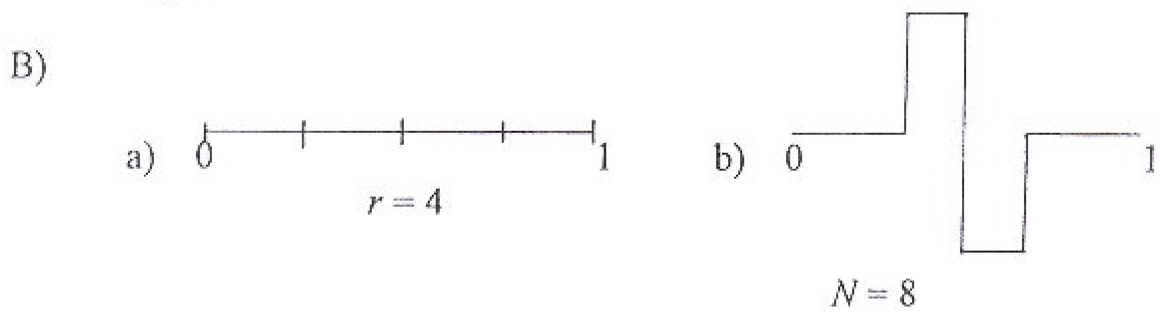
Lo studio della curva di Koch suggerisce diversi modi di come usare il generatore si da ottenere varianti della stessa curva di dimensione frattale diversa l'una dall'altra.
Qualche esempio ci convince di questo.

fig.10



$$\boldsymbol{D = \frac{log5}{log4} \sim 1,16}$$

fig.11



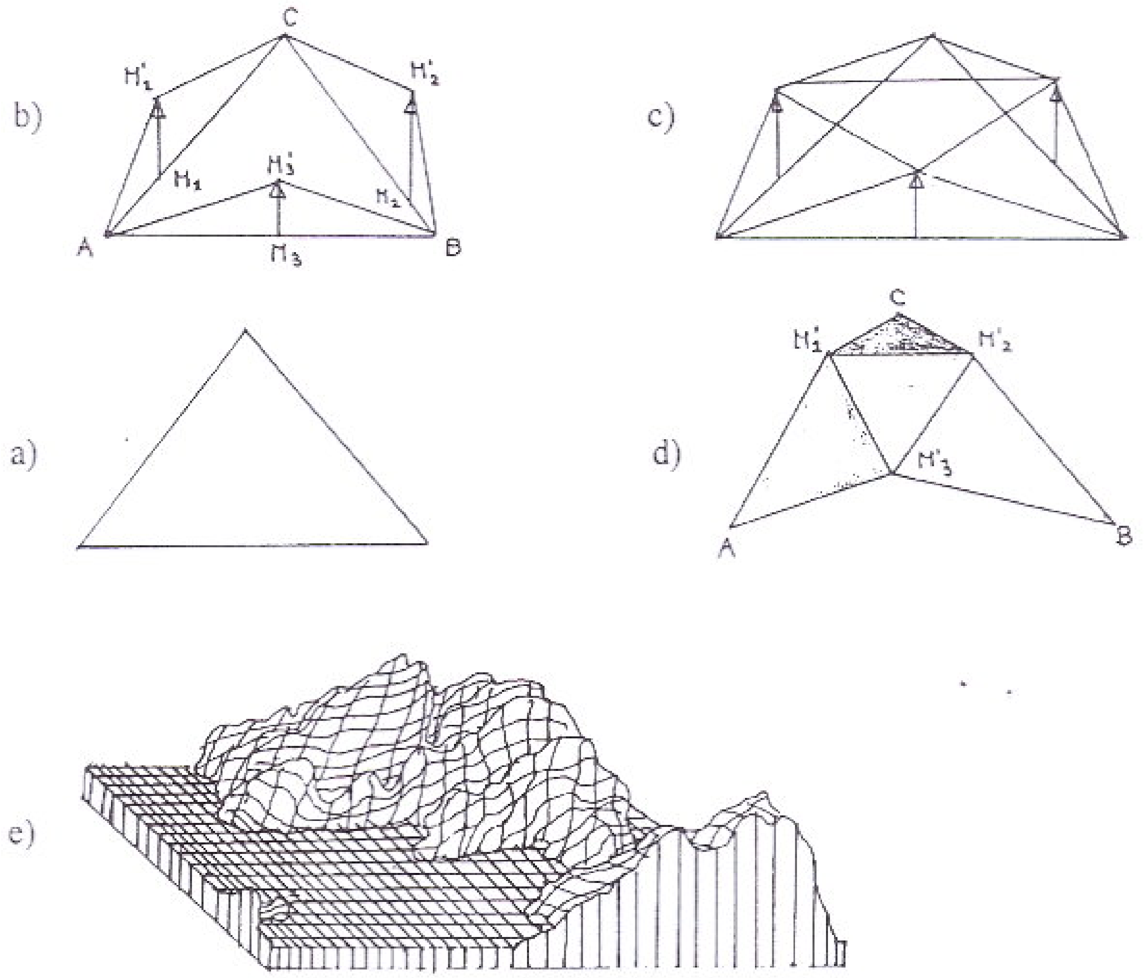
Sono possibili altre generalizzazioni che consentono di modificare opportunamente la curva di Koch fino ad ottenere varianti che sono delle approssimazioni accettabili (modelli teorici) per lo studio di coste.

$$\boldsymbol{D = \frac{log8}{log4} \sim 1,5.}$$

4. Paesaggi frattali

E' possibile creare paesaggi frattali col semplice spostamento del punto medio di ciascun lato di un triangolo secondo un opportuno vettore di direzione .verticale, verso I 'alto o verso il basso. I punti medi di un triangolo (a) vengono spostati verso l'alto o verso il basso secondo un vettore di dato modulo (fig.b); si ottengono cosi i punti traslati M_1', M_2' , M_3', che vengono uniti ai vertici A,B,C del triangolo (vedi fig.b).
Si congiungono, poi, M_1' con M_2', M_1' con M_3' e M_2' con M_3'(fig.c); si ottengono, cosi, quattro nuovi triangoli : A$M_1'M_3'$, B$M_2'M_3'$, $M_1'M_2'M_3'$, C$M_1'M_2'$ (fig.d).
Su questi quattro triangoli si ripete il procedimento. Dopo un certo numero di iterazioni si ottiene quello che si vede in fig. 12 e) che può rappresentare un paesaggio vicino alla realtà.

fig.12



5. Numeri

Sappiamo che le frazioni danno a numeri decimali finiti o illimitati ma con periodo (semplice o misto).
Questi numeri vengono chiamati razionali. Ci sono, però, numeri diversi dai razionali , cioè che sono originati da alcuna frazione (si pensi a $\sqrt{2}$, misura della diagonale di un quadrato di lato 1).
Questi ultimi si chiamano irrazionali (che non provengono da nessuna divisione di numeri interi quali sono il numeratore e il denominatore di una frazione).
L'insieme dei numeri razionali e irrazionali costituiscono l'insieme dei numeri reali e quest'ultimo viene indicato col simbolo $\mathbb{R}$; l'insieme dei numeri reali copre tutti punti di una linea retta senza lacune (perciò è detto continuo).

Il numero uno è detto l'unità dei numeri reali. La radice quadrata di un numero negativo, per definizione, non è un numero reale, perché il quadrato di un numero reale è sempre positivo. Ma spessissimo ci troviamo a che fare con i numeri negativi che appaiono sotto il segno di radice quadrata, anche se il risultato finale è un numero reale. Bisogna, dunque, ovviare a questo inconveniente. A tal fine si definisce una nuova classe di numeri detti numeri immaginari.

5.1. Numeri immaginari

Sia la seguente

<u>Def</u> Si definisce *unità immaginaria*, e viene indicata col simbolo i, la quantità $\sqrt{-1}$.

Dunque ,per definizione $\sqrt{-1} = i.$
Tale unità i è diversa dall'unità 1 dei numeri reali .
Tuttavia in base alla definizione le due unità sono legate dalla relazione

$$i^2 = -1$$

I numeri reali moltiplicati per **i** danno luogo a nuovi numeri detti immaginari. In altre parole se a ϵ ℝ allora a moltiplicato per i è un numero immaginario . Attenzione però ,moltiplicando ancora per i un numero immaginario si torna alla classe dei numeri reali.

$$ai \times i = ai^2 = a(-1) = -a$$

Sia ,ora, l'altra

<u>Def.</u> Si dice *numero complesso* una scrittura del tipo

$$a + bi$$

oppure

$$a - bi$$

nella quale a è un numero reale e bi un numero immaginario.
E' utile sottolineare che il simbolo + (o il simbolo -) non ha il significato di addizione algebrica. La giustificazione dell'uso di tale simbolo sta nel fatto che le quattro operazioni fondamentali coi numeri complessi sono così definite da potersi eseguire mediante le regole dell'algebra dei numeri reali.
Invero, dati due numeri complessi a + bi e c + di

- la loro somma

$$a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

è ancora un numero complesso ;

- il loro prodotto (ricordando che $(i^2 = -1)$

$$(a + bi) x (c + di) = ac + adi + bci + bdi2 = ac + adi + bci - bd$$
$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$

è ancora un numero complesso .

<u>Def</u>. Due numeri *complessi* si dicono *coniugati* quando hanno la stessa parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di segno opposto .

In altre parole due numeri complessi coniugati sono della forma

$$a + bi \ e \ a - bi$$

<u>Def</u>. Si dice *modulo* o *valore assoluto* (a volte anche dimensione) di un numero complesso la quantità reale

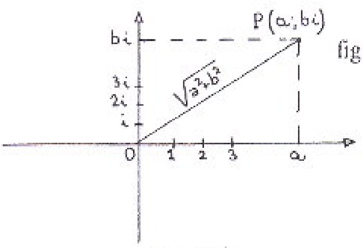
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

dove $z = a + bi$ (oppure $z = a - bi$) .

5.2. Rappresentazione cartesiana dei numeri complessi

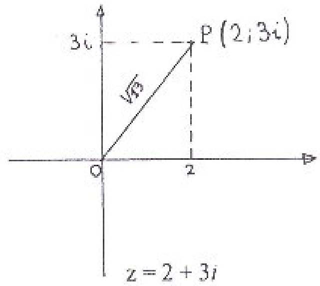
E' possibile rappresentare i numeri complessi i11 un opportuno sistema di riferimento cartesiano, nel quale sull'asse orizzontale si riportano le unità della parte reale e sull'asse verticale quelle immaginarie (vedi fig.13).

fig.13



$z = a+bi$

fig.14



$z = 2+3i$

In pratica il simbolo dell'unità immaginaria i viene sottinteso (vedi fig. 14).
La distanza del punto del piano cartesiano così individuato dall'origine è il modulo (o dimensione) del numero complesso. L'insieme dei punti corrispondenti ai numeri complessi costituisce il cosiddetto **PIANO IMMAGINARIO** o di **GAUSS**.

6. Insiemi di Julia. Insieme di Mandelbrot.

Abbiamo già parlato di frattali autosimili per cambiamenti di scala e per traslazioni (i cosiddetti invarianti per trasformazioni lineari). Mandelbrot si pose la questione di che cosa succedeva con frattali invarianti per trasformazioni non lineari, in cui si possono eseguire le operazioni di quadrato, cubo. L'uso dell'elaboratore aiutò parecchio Mandelbrot a dare dei risultati sorprendenti . Lo stesso problema si erano posti all'inizio del secolo i matematici francesi **Gaston Julia** (1893-1978) e **Pierre Fatou** (1878-1929) i quali si erano arrestati per la complessità dei calcoli e per l'impossibilità di rappresentare gli oggetti frattali in esame (a quei tempi non c'era l'elaboratore!). Mandelbrot, che era stato allievo di Julia al Polytecnique a Parigi, era venuto a conoscenza dei lavori di Julia e nel 1979, mentre lavorava all'IBM, cominciò a esaminare, servendosi di un elaboratore, la funzione $\boldsymbol{f(x) = x^2 + c}$ In cui sia la variabile x sia il parametro c sono numeri complessi . Il numero complesso c assume il ruolo di parametro di controllo e può essere scelto a piacere. Ottenne, così, all'elaboratore una doppia macchia simile a uno scarafaggio, a cui è stato dato il nome di insieme di Mandelbrot.

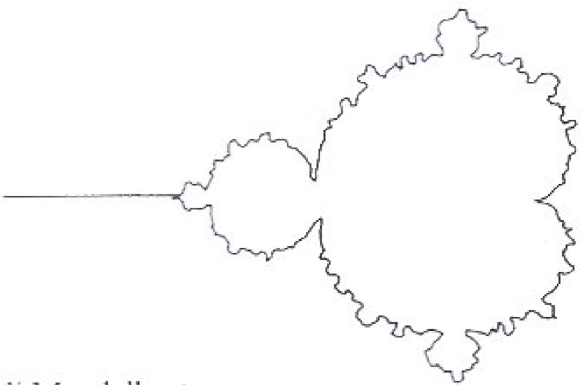


fig.15

L'insieme : di Mandelbrot

$[\boldsymbol{f(x) = x^2 + c \ con \ c = a + bi \ dove \ -2,25} < a < 0{,}75 \ \boldsymbol{e \ -1,5} < b < 1{,}5\,]$

Si è provato che l'insieme di Mandelbrot ha a che fare con tutti i processi dinamici, perciò occupa un posto importante in matematica assieme al cerchio e ai poligoni regolari.
Ma vediamo più nei dettagli come è possibile ottenere quelle strane forme che sono di unica bellezza .
Riprendiamo la funzione

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 + c}$$

Abbiamo detto che x è un numero complesso, quindi del tipo

$$\boldsymbol{x = x_0 + y_0 i}$$

e anche c è un numero complesso, preso a piacere, quindi del tipo

$$\boldsymbol{c = a + bi}$$

Allora

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f(x)} &= x^2 + c = (x_0 + y_0 i)^2 + a + bi = x_0^2 + y_0^2 i^2 + 2x_0 y_0 i + a + bi \\ &= x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 y_0 i + a + bi = \boldsymbol{x_0^2 - y_0^2 + a + (2x_0 y_0 + b)i} \end{aligned}$$

Posso, allora, considerare nel piano complesso tutti i punti di coordinate l'ascissa la parte reale

$\boldsymbol{x_0^2 - y_0^2 + a}$ e l'ordinata la parte immaginaria $\boldsymbol{2x_0 y_0 + b}$.

In altre parole posso organizzare i punti con l'unica e comoda scrittura

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x_0^2 - y_0^2 + a} \\ \boldsymbol{y = 2x_0 y_0 + b} \end{cases}$$

con (x ,y) le coordinate dei punti.

Facciamo un esempio. Supponiamo che il punto di partenza sia l'origine e quindi

$$(x_0;\ yo) = (O;\ O)\ e\ che\ c = 0{,}2 + \ 0{,}1\ x\ i.$$

Cioè $x_0 = 0;\ y_0 = 0; a = 0{,}2; b = 0{,}1$. Dopo la 1^ tappa il punto P, di coordinate

$(x_0^2 - y_0^2 + a; 2x_0 y_0 + b) \equiv (0{,}2; 0{,}1)$, viene spostato in

$$P_1 \equiv (0{,}2^2 - 0{,}1^2 + 0{,}2; 2 \times 0{,}2 \times 0{,}1 + 0{,}1) \equiv (0{,}23; 0{,}14).$$

Dopo la 2^ tappa P_1 si porta in

$$P_2 \equiv (0{,}23^2 - 0{,}14^2 + 0{,}23; 2 \times 0{,}23 \times 0{,}14 + 0{,}14) \equiv (0{,}2633; 0{,}2044)$$

Dopo la 3^ tappa P_2 si porta in

$$P_3 \equiv (0{,}2633^2 - 0{,}2044^2 + 0{,}2633; 2 \times 0{,}2633 \times 0{,}2044 + 0{,}2044) \equiv (0{,}2908; 0{,}3120).$$

E cosi via per un certo numero di iterazioni , ottenendosi tanti punti. Ora, poiché il monitor di un elaboratore funge da piano cartesiano con tanto di asse delle ascisse e delle ordinate ,i punti possono essere riportati sul monitor (utilizzando un opportuno programma) occupando un pixel.

La scelta del valore del numero complesso c è decisiva, nel senso che essa può determinare due situazioni:

1) Dopo un certo numero di iterazioni sul calcolo della funzione $f(x) = x^2 + c$, tutti i punti che si ottengono continuano a permanere nei dintorni dell'origine. In tal caso si dice che il percorso che si ottiene unendo in successione tutti i punti P, P_1, P_2 e così via è prevedibile o limitato. Allora si parla di insieme di Mandelbrot;
2) Se invece dopo un certo numero di iterazioni appaiono punti che si allontanano dall'origine e puntano verso l'infinito (cioè si allontanano sempre di più senza speranza che possano rientrare in una zona intorno all'origine), allora il percorso si dice non prevedibile o illimitato.

I punti, diciamo, liberi (cioè quelli che si allontanano verso l'infinito) formano il cosiddetto insieme di fuga ;i punti che restano confinanti nella zona attorno all'origine formano il cosiddetto insieme prigioniero.
La forma della prigione dipende dal valore del numero complesso c scelto.
L'insieme prigioniero (i cui punti-pixel vengono colorati di nero dai matematici)e l'insieme di fuga (i cui punti-pixel invece vengono colorati con vari colori a seconda del gusto del programmatore) sono separati da una frontiera molto molto stretta, frontiera che assume il nome di insieme di Julia, in onore appunto del matematico Gaston Julia, che per primo si occupò di questi problemi.
Come si fa a sapere se un punto è di fuga oppure prigioniero ? La risposta è data da un teorema dimostrato dallo stesso Mandelbrot: **se un punto si trova ad una distanza maggiore o uguale a due unità dall'origine, allora è destinato all' infinito; se invece si trova ad una distanza minore a due unità dall'origine, allora è un punto prigioniero.**

A questo punto appare chiaro che per ciascun valore prefissato di c usato nella formula di iterazione

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 + c}$$

appare un diverso insieme di Julia, pieno di prigionieri (ricordiamo che i punti prigionieri costituiscono l'insieme di Mandelbrot la cui forma a scarafaggio non cambia sostanzialmente al variare di c).
Nella scelta di c può capitare solo questo :
a) si ottengono insiemi di Julia che sono **CONNESSI** (senza soluzione di continuità); (vedi fig. 16).
b) si ottengono insieme di Julia che **NON** sono **CONNESSI** (discontinui, costituiti di pezzi per cosi dire " sparpagliati ").

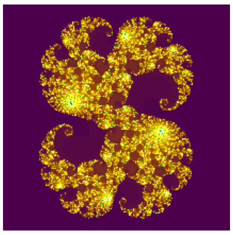
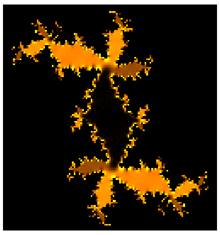
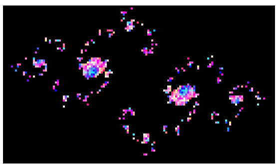
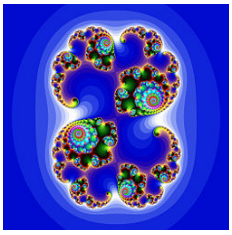
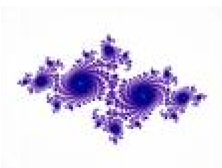
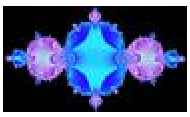





fig.16

(a) (b) (c) (d)

Insiemi di Julia derivanti dalla frontiera dell'insieme di Mandelbrot.

(e) (f) Gli insiemi di Julia **CONNESSI** sono a, e, ed f; mentre b, c, e d non lo sono.

Per sapere se un insieme di Julia è connesso oppure non lo è basta conoscere se il punto corrispondente a c appartiene oppure no all'insieme di Mandelbrot .
In altre parole se la successione risultante dall'iterazione delle formula

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 + c}$$

cioè 0, c, c^2 + c, $(c^2 + c)^2$ + c, ..., non diverge verso l'infinito allora l'insieme di Julia è connesso e il punto corrispondente a c appartiene all'insieme di Mandelbrot; se invece la successione diverge verso l'infinito allora l'insieme di Julia è non connesso e il punto corrispondente a c non appartiene all'insieme di Mandelbrot.
Si è detto che un arbitrario valore di c da' luogo a un nuovo e diverso insieme di Julia, mentre l'insieme di Mandelbrot, in un certo senso, riassume, in un colpo, tutti i possibili insiemi di Julia .

Peitgen (H.O. Peitgen e P.H. Richter: **La bellezza dei frattali** -Bollati-Boringhieri) ha paragonato l'insieme di Mandelbrot a un grande libro e gli insiemi di Julia alle singole pagine che lo compongono.
A seconda della zona dell'insieme di Mandelbrot che si vuole, per cosi dire, perlustrare, si intravedono diversi insiemi di Julia.
I domini di coordinate che racchiudono da tutti e quattro i lati i due tipi di insiemi sono:
(preso $c = a + bi$ numero complesso)

A) Insiemi di Julia : -1,8< a < +0,75 e -1,8< b < +1,8 ;

B) Insiemi di Mandelbrot : -2,25< a <+O,75 e -1,8< b < +1,5 .

Ancora una considerazione: l'insieme di Julia è simile a se stesso mentre l'insieme di Mandelbrot non lo è perché solo così racchiude l'infinita quantità di vari insiemi di Julia.
I confini dell'insieme di Mandelbrot sono popolati da insiemi di Julia connessi; al di là dei confini ci sono insiemi di Julia non connessi.
Per chiudere, ricordiamo che la dimensione frattale è la caratteristica di ogni frattale : essa misura la scabrosità, la complessità, il ripiegarsi su se stesso di un oggetto frattale.

Nicola Filipponio

Testi e riviste consultate :

1) B. Mandelbrot: " **Gli oggetti frattali** ". Einaudi Ed.1987.
2) K. Devlin: " **Dove va la matematica** ". Bollati-Boringhieri.
3) H.-O. Peitgen ,P.H. Richter: "**La bellezza dei frattali** ". Bollati-Boringhieri.
4) A.K. Dewdney: "**Un microscopio al calcolatore per gettare uno sguardo sul più complesso fra gli oggetti della matematica** ". Le scienze no 206 ,ottobre 1985.
5) A.K. Dewdney: "**Esplorando algoritmi genetici in un mare primordiale pieno di flib** ". Le scienze no 209/1986.
6) A.K. Dewdney: "**Bellezza e profondità: l'insieme di Mandelbrot e un'orda di suoi cugini detti insiemi di Julia** ". Le scienze no 248, aprile 1998.
7) A.K. Dewdney: "**Un escursione nell'insieme di Mandelbrot a bordo del Mandelbus** ". Le scienze no 248 ,aprile 1988.
8) L.M. Sander : " **L'accrescimento dei frattali** ". Le scienze.
9) H. Jurgess ,H.-O. Peitgen ,D. Sanpe: "**Il linguaggio dei frattali** ". Le scienze no 266 ,ottobre 1990.