Lezione di goniometria

Intanto, non è male riportare le seguenti definizioni:

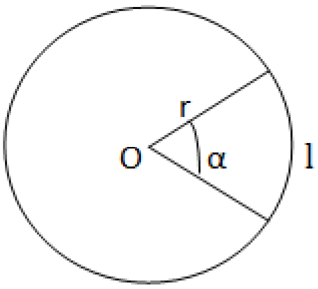
Goniometria: si occupa della misurazione degli angoli.

Trigonometria: si occupa delle relazioni che stanno fra i lati e gli angoli di un triangolo.

Radiante: è quell'arco di circonferenza che sotteso è uguale al raggio.

Circonferenza goniometrica: è una circonferenza di raggio unitario.

Per raggio unitario si intende che esso viene assunto come unità di misura.



Il valore del radiante viene ottenuto ricorrendo al teorema di proporzionalità nella circonferenza

"la circonferenza sta all'arco l come l'angolo giro sta ad α"

$$2\pi r : l = 360° : \alpha°$$

da cui $\alpha° = \frac{360° \cdot l}{2\pi r} = \frac{360°}{2\pi}$ essendo l=r

Ma $\frac{360°}{2\pi} = \frac{360°}{6{,}28} = 57°\,17'\,44''$

per cui $\alpha° = 57°\,17'\,44''$

A questo angolo corrisponde l'arco l che è la nuova unità di misura chiamata **radiante.**

Dunque, **il radiante è l'arco di circonferenza a cui corrisponde l'angolo al centro di $57°\,17'\,44''$.**

SCHEMA PER LA CONVERSIONE DA GRADI A RADIANTI E VICEVERSA

Abbiamo visto che all'angolo di 57°17'44'' corrisponde l'arco radiante che viene assunto come nuova unità di misura e indicata 1_R, cioè

$$1_R = \frac{360°}{2\pi}$$

Quindi $$2\pi_R = 360°$$

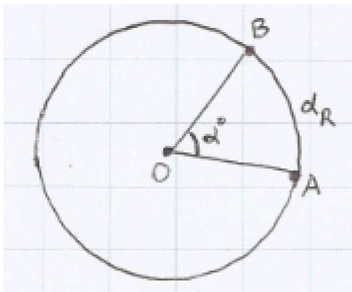
In altre parole, una circonferenza corrisponde ad un angolo di 2π radianti.

Perciò abbiamo le corrispondenze (sottintendendo i valori della prima colonna in radianti):

2π	360°
π	180°
$\frac{\pi}{2}$	90°
$\frac{\pi}{3}$	60°
$\frac{\pi}{4}$	45°
$\frac{\pi}{6}$	30°

Più in generale possiamo dire che, indicato con $\alpha°$ l'angolo al centro e con α_R l'arco corrispondente AB,

$$\alpha^{\circ} : \alpha_R = 360° : 2\pi$$

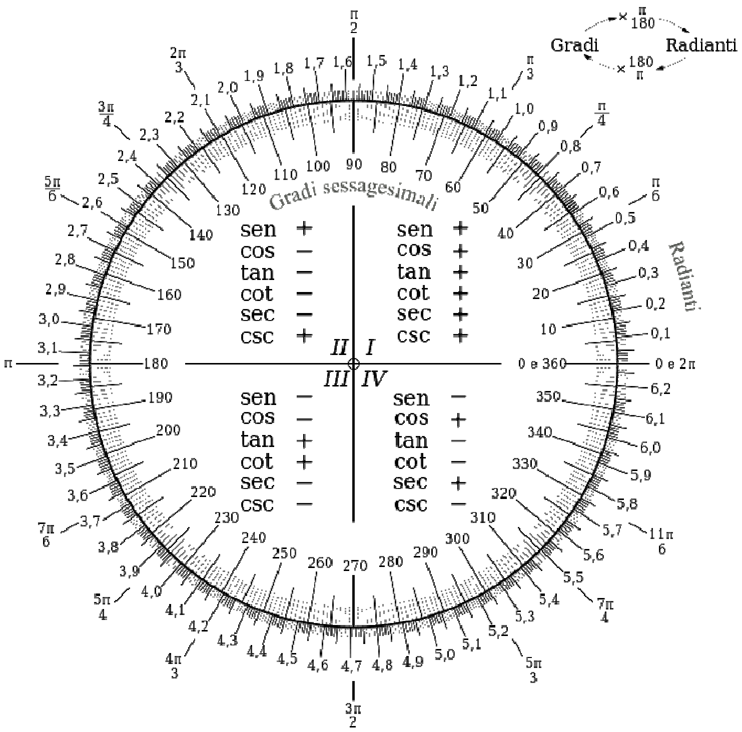


Questa proporzione ci fornisce le formule di conversione:

(1) $$\boxed{\alpha_R = \frac{2\pi}{360^{\circ}} \bullet \alpha^{\circ}}$$

(2) $$\boxed{\alpha^{\circ} = \frac{360^{\circ}}{2\pi} \bullet \alpha_R}$$

Un comodo strumento di rapida conversione è riportato nella figura sottostante.



(Disegno preso da https://it.wikipedia.org/wiki/Radiante)

Perché si introduce la nuova unità di misura detto, appunto, radiante?

Se vogliamo fare il grafico delle funzioni goniometriche, per esempio del seno cioè y=sen(x) , dobbiamo riportare sull'asse delle ascisse i valori delle x; ma questi sono valori di angoli in sessagesimi e non sappiamo come riportarli su una retta. Allora sorge la necessità di "rettificare" gli angoli, cioè renderli equivalenti a segmenti che possono essere riportati sull'asse. Di qui l'introduzione della nuova unità di misura radiante. Ad angoli al centro corrispondono archi che, sottesi, diventano segmenti che si possono riportare facilmente sull'asse delle ascisse x.

Diamo, ora, per scontate le definizioni di seno, coseno, tangente, cotangente, secante e cosecante: sei personaggi in cerca di autore. Queste funzioni, dette goniometriche elementari, sono legate tra loro da legami, diciamo cosi, di "parentela" molto stretti. I legami sono le cosiddette formule (ma che io chiamo relazioni più correttamente).

Quelle che dobbiamo ricordare di più sono le seguenti:

1^ relazione fondamentale $$sen^2(x) + cos^2(x) = 1 \quad (1)$$

2^ relazione fondamentale $$tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)} \quad (2)$$

3^ relazione fondamentale $$cotg(x) = \frac{1}{tg(x)} = \frac{\cos(x)}{sen(x)} \quad (3)$$

Inoltre si hanno le seguenti altre relazioni, ai fini di eseguire gli esercizi:

$$cos(x) = \frac{1}{\mp\sqrt{1 + tg^2(x)}} = \frac{\mp cotg(x)}{\sqrt{1 + cotg^2(x)}} \quad (4)$$

$$sen(x) = \frac{tg(x)}{\mp\sqrt{1 + tg^2(x)}} = \frac{1}{\mp\sqrt{1 + cotg^2(x)}} \quad (5)$$

Dimostro la (5):

$$cos^2(x) = \frac{cos^2(x)}{1} = \frac{cos^2(x)}{sen^2(x) + cos^2(x)} = \frac{\frac{cos^2(x)}{cos^2(x)}}{\frac{sen^2(x) + cos^2(x)}{cos^2(x)}} = \frac{1}{\frac{sen^2(x)}{cos^2(x)} + \frac{cos^2(x)}{cos^2(x)}} = \frac{1}{tg^2(x) + 1}$$

Di conseguenza $$cos(x) = \frac{1}{\mp\sqrt{1+tg^2(x)}}$$

Per ottenere la seconda uguaglianza nella (5) si divide numeratore e denominatore non per $cos^2(x)$ ma per $sen^2(x)$. Analogamente si dimostra la (6).

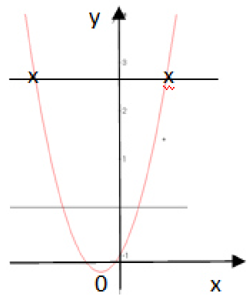
Osservazioni

1) E' preferibile scrivere l'argomento fra parentesi: sen(x) piuttosto che sen x;
2) Le scritture $sen^2(x)\ e\ (sen(x))^2$ si equivalgono, cioè $(sen(x))^2 = sen^2(x)$. Così per le altre funzioni goniometriche.

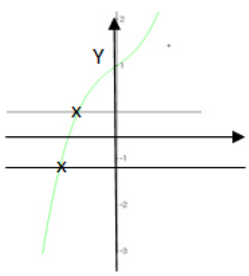
***

<u>Qualche considerazione sulle funzioni.</u>

- **Una funzione f può ammettere l'inversa f^{-1}**. Siamo sicuri che una funzione f ammette inversa f^{-1} se e solo se essa è **bigettiva**. Per sapere se una funzione è bigettiva, deve accadere che una qualsiasi retta parallela all'asse delle x intersechi il suo grafico in un sol punto.

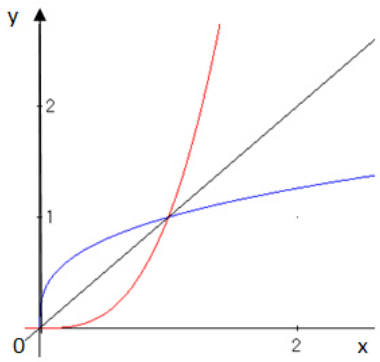


la retta interseca il grafico in due punti, dunque la funzione **non** è bigettiva



ciascuna retta interseca il grafico in un sol punto, dunque la funzione è bigettiva

- Inoltre, una funzione f e la sua inversa f^{-1} hanno grafici che sono **simmetrici** rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (vedi figura sotto).



<u>Dominio e Codominio delle funzioni goniometriche elementari</u>

Ricordiamo che il

***Dominio**, o campo di esistenza, di una funzione è l'insieme dei valori della x in corrispondenza di ciascun dei quali esiste il valore della y.*

***Codominio** di una funzione è l'insieme dei valori della y ciascun dei quali è corrispondente di un valore della x.*

Per le funzioni goniometriche possiamo fare riferimento alla seguente tabella.

Funzione diretta	**D**ominio	**C**odominio	Funzione indiretta	**D**ominio	**C**odominio
y = sen(x)	**D**=[- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$]	**C**=[- 1;1]	y = arcsen(x)	**D**=[- 1;1]	**C**=[- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$]
y = cos(x)	**D**=[0; π]	**C**=[- 1;1]	Y = arcos(x)	**D**=[- 1;1]	**C**=[0; π]
y = tg(x)	**D**=[- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$]	**C**=ℝ	Y = arctg(x)	**D**=ℝ	**C**=[- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$]
y = cotg(x)	**D**=]0; π[	**C**=ℝ	y = arctg(x)	**D**=ℝ	**C**=]0; π[

Facciamo qualche esercizio.

1) Determinare le condizioni a cui deve soddisfare il parametro a affinché sia soddisfatta l'uguaglianza

$$(2a-3)\cos(x)=-a+4$$

nel 2° quadrante.

Risolvo

L'uguaglianza si scrive $\cos(x)=\frac{-a+4}{2a-3}$; poiché le x stanno nel secondo quadrante, esse devono essere negative. Inoltre il codominio della funzione coseno è C=[- 1;1]. Ma noi dobbiamo considerare solo $-1 \leq \cos(x) \leq 0$; pertanto dobbiamo risolvere le disequazioni

$$-1 \leq \frac{-a+4}{2a-3} \leq 0$$

Che equivalgono al sistema

$$\begin{cases} -1 \leq \dfrac{-a+4}{2a-3} \\ \dfrac{-a+4}{2a-3} \leq 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $a \leq -1 \ \vee \ a \geq 4$.

2) Determinare le condizioni a cui deve soddisfare il parametro k affinché sia soddisfatta l'uguaglianza

$$tg(x)=\frac{2k}{k+2}$$

nel 1° quadrante.

Risolvo

Le x nel primo quadrante sono positive; il codominio della tangente è C=ℝ

Dobbiamo risolvere la disequazione

$$tg(x) \geq 0$$

cioè $\frac{2k}{k+2} \geq 0$, le cui soluzioni sono $k < -2 \ \vee \ k \geq 0$.

3) Dato $tg(x)=\frac{1}{5}$, calcolare $\cos(x)$.

Risolvo

In base alla (5) di pag.2 sappiamo che

$$cos(x)=\frac{1}{\mp\sqrt{1+tg^2(x)}}=\frac{1}{\mp\sqrt{1+(\frac{1}{5})^2}}=\frac{1}{\mp\sqrt{\frac{25+1}{25}}}=\mp\frac{5}{\sqrt{26}}$$

4) Determinare il dominio della funzione

$$y = \text{arcsen}(4x-3)$$

Risolvo

Poiché il dominio dell'arcoseno è [-1;1], allora si ha

$$-1 \leq 4x-3 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 4x-3 \\ 4x-3 \leq 1 \end{cases}$$

Dal sistema, risolto, si ha il dominio

$$D = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$$

5) Calcolare

Sen(arctg(1))

Risolvo

E' una funzione composta. Calcoliamo prima il valore della funzione interna

$arctg(1) = \frac{\pi}{4}$ e quindi $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6) Determinare il dominio della funzione

$$y = \arccos(-x^2+2x)$$

Risolvo

Poiché il dominio dell'arco coseno è D = [-1;1], allora si ha

$$-1 \leq -x^2+2x \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq -x^2+2x \\ -x^2+2x \leq 1 \end{cases}$$

che, risolto, fornisce il dominio

$$D = \left[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right]$$

7) trovare il dominio e la funzione inversa, restringendo tale dominio se necessario (per avere l'inversa bisogna restringere il dominio in modo che la funzione sia bigettiva), della funzione

$$y = \arccos\left(\frac{x+1}{2x}\right)$$

Risolvo

Poiché il dominio dell'arco coseno è [-1;1], si ha

$$-1 \leq \frac{x+1}{2x} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq \frac{x+1}{2x} \\ \frac{x+1}{2x} \leq 1 \end{cases}$$

che, risolto, dà

$$D = \left\{x \leq -\frac{1}{3} \vee x \geq 1\right\}$$

Per l'inversa: $\cos(y) = \cos\left(\arccos\left(\frac{x+1}{2x}\right)\right) = \frac{x+1}{2x} \rightarrow x = \frac{1}{2\cos(y)-1}$

Scambiando la x con la y si ha

$$y = \frac{1}{2\cos(x)-1}$$

Puoi inventare tu tanti esercizi ai quali applicare (1), (2), (3), (4) e (5) (ma anche altre a seconda dell'esercizio).