

LOGARITMI

Consideriamo l'equazione esponenziale

$$a^x = b.$$

Non siamo certi che esista un qualche valore di x che soddisfi tale equazione. Non solo, e se anche esistesse non siamo certi dell'unicità di tale soluzione.

Se facciamo, però, le seguenti ipotesi: $a > 0$ e $a \neq 1$, $b > 0$ allora siamo certi dell'esistenza ed unicità di x . In altre parole vale il seguente

Teorema

Sia $a^x = b$ un'equazione esponenziale, se $a > 0$ e $a \neq 1$ e $b > 0$ allora esiste ed è unica la soluzione dell'equazione esponenziale.

L'unica soluzione dell'equazione esponenziale di cui nel teorema si dice logaritmo di b in base a e si scrive

$$\log_a b = x$$

Cioè

$$a^{\log_a b} = b$$

Dalla definizione si ha

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad (1)$$

$$\text{con } a > 0, a \neq 1 \text{ e } b > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

PROPRIETA'

Intanto, è banale ma importante osservare che

$$\text{a) } \log_a a = 1$$

$$\text{b) } \log_a 1 = 0$$

Inoltre, si hanno le seguenti altre:

$$1) \log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n, \text{ con } a > 0, a \neq 1, m > 0, n > 0.$$

$$2) \log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n, \text{ con } a > 0, a \neq 1, m > 0, n > 0.$$

$$3) \log_a m^n = n \cdot \log_a m, \text{ con } a > 0, a \neq 1, m > 0, n \in \mathbb{R}.$$

$$4) \log_a \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \cdot \log_a m, \text{ con } a > 0, a \neq 1, m > 0, n \in \mathbb{N}_0$$

Dimostriamo la 1):

poniamo $\log_a m = x$ e $\log_a n = y$; per la (1) si hanno

$$\log_a m = x \Leftrightarrow a^x = m$$

$$\log_a n = y \Leftrightarrow a^y = n,$$

moltiplicando membro a membro si ha

$$m \cdot n = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Cioè

$$a^{x+y} = m \cdot n$$

da cui, sempre per la (1), si ha

$$\log_a m \cdot n = x + y = \log_a m + \log_a n.$$

Analogamente si dimostra la 2).

Per la 3) da $\log_a m = x$ si ha

$$a^x = m;$$

elevando ambo i membri ad n si ha

$$(a^x)^n = m^n$$

e quindi

$$a^{n \cdot x} = m^n$$

da cui, per la (1)

$$\log_a m^n = n \cdot x = n \cdot \log_a m$$

Per la 4) è sufficiente osservare che per definizione di radicale ad esponente razionale si ha

$$\sqrt[n]{m} = m^{\frac{1}{n}}$$

per cui, applicando la 3). Si ha

$$\log_a \sqrt[n]{m} = \log_a m^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log_a m$$

Osservazioni:

- a) Se la base a è 10, allora i logaritmi in tale base si dicono **decimali** o volgari o di Briggs e vengono scritti **Log** sottintendendo la base 10

$$\log_{10} = \text{Log};$$

- b) Se la base a vale e (numero di Nepero: $e = 2,718281828..$), allora i logaritmi in tale base si dicono **naturali** o neperiani e vengono scritti **log** oppure **ln** sottintendendo la base e

$$\log_e = \ln.$$

Cambiamento di base:

$$\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$$

con $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0$.

In particolare

$$\log_a c = \frac{\ln c}{\ln a}$$

Esempio:

$$\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,58496$$