OMOTETIA

§1. Fissiamo un punto M nel piano e sia k un numero. Consideriamo la funzione che ad ogni punto P del piano fa corrispondere il punto P’ di modo che

- i tre punti M, P e P’ siano allineati;
- $\overline{MP'} = |k|\overline{MP}$. Ossia $\frac{\overline{MP'}}{\overline{MP}} = |k|$.

La presenza del modulo di k significa che k può essere positivo o negativo e il suo segno ci dà l’informazione sulla posizione di P’. Nel caso k>0 allora significa che P’ si trova dalla stessa parte di P rispetto a M (cioè P’ appartiene alla semiretta MP) (fig.1).

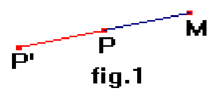


fig.1
omotetia di centro M e rapporto K = 2

Nel caso k<0 allora vuol dire P’ si trova dall’altra parte di P rispetto a M (fig.2).

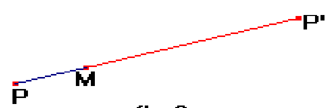


fig.2
omotetia di centro M e rapporto K = -3

Tale funzione è bigettiva perché ammette l’inversa:
Infatti, se a P corrisponde P’ di modo che $\frac{\overline{MP'}}{\overline{MP}} = |k|$, al punto P’ corrisponde P di modo che $\frac{\overline{MP}}{\overline{MP'}} = \frac{1}{|k|}$.
Essa si dice ***omotetia***, il punto M è il centro di omotetia, il numero k è il rapporto di omotetia.
Si ha, dunque, la seguente

<u>Definizione</u> Si dice omotetia la trasformazione del piano in sé la quale, fissato un punto M, ad ogni punto P fa corrispondere il punto P’ di modo che $\overline{MP'} = |k|\overline{MP}$.

La parola omotetia viene dalla parola composta greca *omo* (stesso) e *thetos* (collocato), cioè stesso luogo. I due punti P e P’ sono collocati nello stesso luogo e sono legati dal centro M di omotetia.
L’omotetia si può indicare col simbolo $O_{(M,k)}$, mentre la sua inversa con $O_{(M,\frac{1}{k})}$.
Osserviamo che:

- Se k=1 allora P’ coincide con P e l’omotetia coincide con la trasformazione identica **I**.
- Se k=-1 allora P’ risulta essere il simmetrico di P rispetto al centro M di omotetia; in tal caso l’omotetia coincide con la simmetria centrale $\mathbf{S_M}$, dove M è l’incontro degli assi;
- Il centro è l’unico punto unito dell’omotetia;
- Se $|k|>1$ si parla di *dilatazione* perché la figura **F’** è ingrandita rispetto alla figura omotetica **F**;

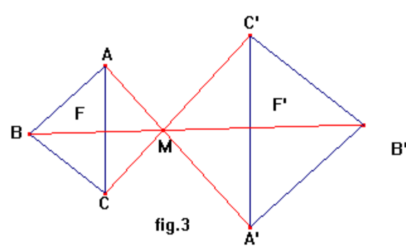


fig.3
omotetia di centro M e rapporto k = -1,5

- Se <1 si parla di *contrazione* perché la figura **F’** è rimpicciolita rispetto all’omotetica **F**.

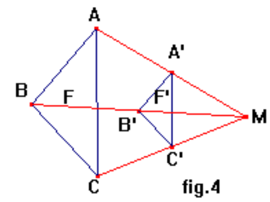


fig.4
omotetia di centro M e rapporto K = 0,5

Si hanno le seguenti proprietà:

1. L’omotetia trasforma retta in retta parallela (è, dunque, una collineazione),

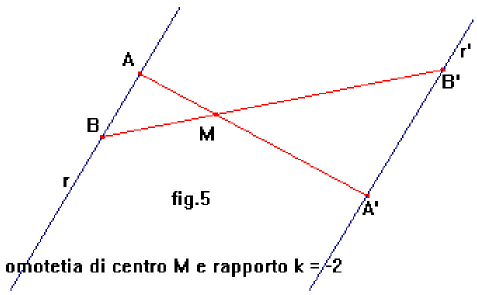


fig.5
omotetia di centro M e rapporto k = -2

2. L’omotetia conserva

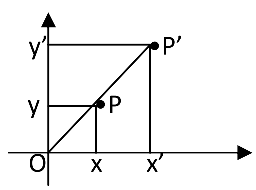
   2.1 l’ampiezza degli angoli;
   2.2 il parallelismo tra rette;
   2.3 la perpendicolarità.

Attenzione: l’omotetia, in generale, non conserva la distanza fra due punti cioè non è un’isometria.

§2. <u>Equazioni dell’omotetia</u>

2.1 Consideriamo come centro dell’omotetia l’origine degli assi, sia k il rapporto di omotetia, sia P un punto del piano cartesiano e P’ il suo corrispondente nell’omotetia.

fig.6



Siano, dunque, P(x;y) e P’(x’;y’) i due punti corrispondenti.

Per definizione di omotetia si hanno le seguenti

$x'/x = k$ e $y'/y = k$ da cui

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \qquad (2.1.1)$$

Le (2.1.1) rappresentano le equazioni dell’omotetia con centro l’origine degli assi.

Esempio. Sia P(2;3) un punto del piano cartesiano; determinare il corrispondente P’ nell’omotetia di centro O e rapporto k=4.

Risolviamo: $\begin{cases} x' = 4 \times 2 = 8, \\ Y' = 4 \times 3 = 12 \end{cases}$ dunque P’(8;12).

2.2 Consideriamo, ora, come centro di omotetia un punto qualsiasi M(m;n) del piano cartesiano, e k il rapporto.

Sia P(x;y) un punto e P'(x';y') il suo omotetico. E' sufficiente applicare le equazioni della traslazione degli assi per ottenere le equazioni generali dell'omotetia.

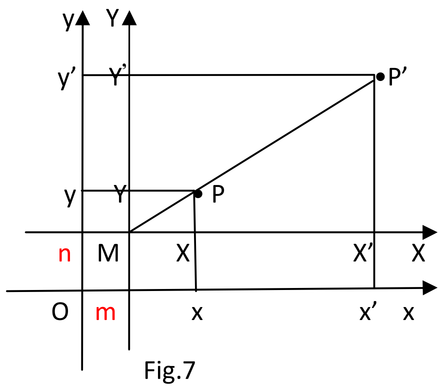


Fig.7

Apllicando le equazioni della traslazione degli assi

otteniamo per il punto P:

$X = x - m$

$Y = y - n$,

e per il punto P':

$X' = x' - m$

$Y' = y' - n$

Poiché si ha, per definizione di omotetia, che

$X' = k\,X$

$Y' = k\,Y$

sostituendo opportunamente in queste equazioni le coordinate di P e di P' ottenute sopra con la traslazione si hanno

$$\begin{cases} x' - m = k(x - m) \\ y' - n = k(y - n) \end{cases} \quad \text{da cui}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x' = k\,x + m(1 - k)} \\ \mathbf{y' = k\,y + n(1 - k)} \end{cases} \qquad (2.1.2)$$

Queste rappresentano le equazioni della omotetia di centro un punto qualsiasi del piano cartesiano.

Esempio. Sia P(-1;3) un punto del piano cartesiano. Determinare il punto P' corrispondente di P nell'omotetia O di centro M(-3;-2) e di rapporto $k = \frac{2}{3}$.

Risolviamo: teniamo presente che x=-1, y=3, m=-3, n=-2, $k = \frac{2}{3}$; sostituiamo questi valori nelle (2.1.2)

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3} \times (-1) - 3 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} - 3 \times \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - 1 = -\frac{5}{3} \\ y' = \frac{2}{3} \times 3 - 2 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 2 - 2 \times \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Pertanto $P'\left(-\frac{5}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right)$.

§3. Composta di omotetie

3.1 Composta di omotetie con lo stesso centro.

Consideriamo due omotetie $O_{(M,k)}$ e $O'_{(M,h)}$ che hanno lo stesso centro M ma rapporto rispettivamente i due numeri reali k e h.

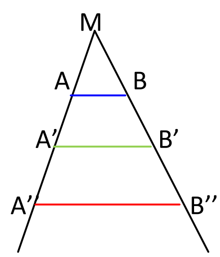


fig.8

Per semplificare consideriamo un segmento AB e di questo tracciamo l’omotetico rispetto sia all’omotetia O di centro M e rapporto k, sia rispetto all’omotetia O’ di centro M e rapporto h. Si ha:

$$\frac{A'B'}{AB} = k \quad e \quad \frac{A''B''}{A'B'} = h$$

Dal primo rapporto si ha A’B’ = k AB che si sostituisce nel secondo rapporto e si ottiene

$$\frac{A''B''}{k\,AB} = h \quad \text{e quindi} \quad \frac{A''B''}{AB} = hk$$

Possiamo, dunque, affermare che:

La composta di due omotetie aventi lo stesso centro ma rapporti diversi k e h è un’omotetia che ha lo stesso centro e rapporto kh.

3.2 Composta di omotetie con centri diversi.

Supponiamo, ora, che le due omotetie abbiano centri diversi; indichiamo con $O_{(M,k)}$ e $O'_{(N,h)}$ due omotetie di centro M e rapporto k la prima, e di centro N e rapporto h la seconda. Ebbene, la composta delle due omotetie date è

- Una traslazione se hk = 1; in tal caso il vettore traslazione è il segmento orientato che congiunge due punti corrispondenti (vedi fig.9);
- Una simmetria centrale se hk = -1; in tal caso il centro della simmetria è il punto medio del segmento che congiunge una coppia di punti corrispondenti ed è allineato con i due centri M ed N (vedi fig.10);
- Una omotetia di rapporto hk se hk ≠ 1, in tal caso il centro di omotetia è il punto di intersezione delle rette che congiungono coppie di punti corrispondenti e tale punto è allineato con M ed N.

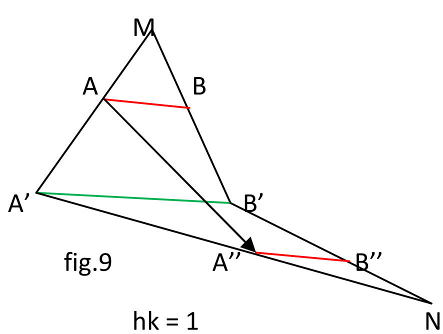


fig.9

hk = 1

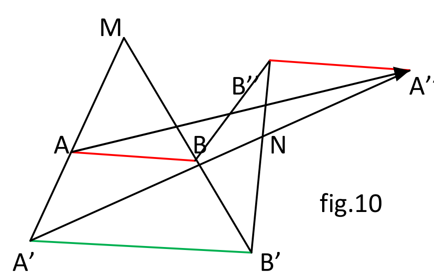


fig.10

hk = -1