GEOMETRIA CON I VETTORI

Una metodologia didattica è quella di spingere l'alunno a ricostruire la dimostrazione di un teorema fornendo opportuni strumenti matematici attraverso cui raggiungere tale obiettivo. In queste brevi note si suggerisce l'uso dei vettori per dimostrare alcuni noti teoremi in un modo semplice, elegante e, allo stesso tempo, rigoroso.

Intanto si dà la seguente definizione di vettore:

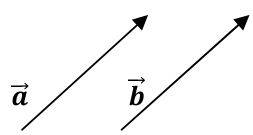
<u>Definizione</u> Si dice *vettore* ogni segmento orientato di estremi A e B di cui si conosce la direzione, un verso (nel senso che A precede B o che si va da A a B) e il modulo (la misura della sua lunghezza).

Un vettore qui verrà indicato col simbolo $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ quando si conoscono gli estremi A e B del segmento; diversamente verrà indicato con lettere minuscole con una freccina sopra $\vec{\boldsymbol{v}}$.
Inoltre, per andare da un punto X a un punto Y del piano, si riterrà indifferente il percorso effettuato, nel senso che tutti i percorsi saranno uguali.

E' utile tenere presente le ulteriori seguenti definizioni di cui ci serviremo per le nostre dimostrazioni.

<u>Definizione</u> Si dice *vettore nullo* il vettore di modulo zero, e viene indicato con $\vec{\mathbf{0}}$.

<u>Definizione</u> Due vettori si dicono *equipollenti* quando hanno stessa direzione, stesso verso e stesso modulo.



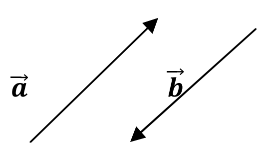
$\vec{\boldsymbol{a}}$ è equipollente a

Fig.1

E' opportuno osservare che l'equipollenza è una **relazione di equivalenza**. Pertanto, nel piano ogni vettore rappresenta una **classe di equivalenza**. La classe di equivalenza di vettori equipollenti al vettore $\vec{\boldsymbol{v}}$ viene indicata con il simbolo $[\vec{\boldsymbol{v}}]$.

<u>Definizione</u> Due vettori si dicono *opposti* quando hanno stessa direzione, stesso modulo ma verso opposto.

Fig.2



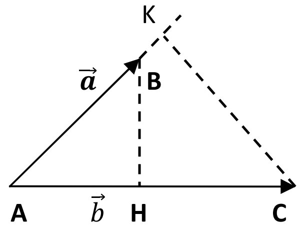
$\vec{\boldsymbol{a}}$ è opposto a $\vec{\boldsymbol{b}}$

La somma di due vettori opposti è nulla, cioè è il vettore nullo (di modulo zero).

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono opposti allora $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ da cui $\vec{a} = -\vec{b}$.

Per alcune dimostrazioni faremo ricorso, anche, alla definizione di prodotto scalare di due vettori.

<u>Definizione</u> Si dice prodotto scalare di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e si indica col simbolo $\vec{a} \bullet \vec{b}$,il prodotto tra il modulo di uno per la proiezione dell'altro sul primo.



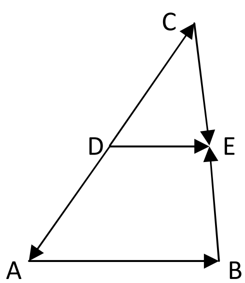
$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \left|\overrightarrow{AB}\right| xAK = \left|\overrightarrow{AC}\right| xAH$$

Il prodotto scalare di due vettori è un numero.

Siamo pronti per dimostrare i seguenti teoremi.

<u>Teorema 1.</u>

In un triangolo si dimostra che il segmento che unisce i punti medi di due lati è uguale alla metà del terzo lato.



Ip: $\overline{AD} = \overline{DC}\ \ e\ \ \overline{BE} = \overline{EC}$

Th: $\overline{DE} = \frac{1}{2} \bullet \overline{AB}$

Dimostrazione:

Per andare da D ad E i percorsi possibili sono due: il primo da D ad A, da A a B, da B ad E. Pertanto si ha

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$$

L'altro percorso è da D a C, da C ad E. E quindi si ha

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}$$

Sommando membro a membro si ha:

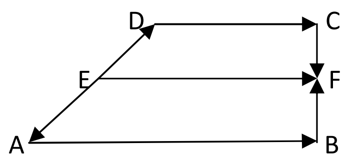
$$2 \bullet \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB} \qquad (1)$$

essendo $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ perché opposti, e $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$ perché opposti. Passando ai moduli dei vettori, dalla (1) si ha:

$$\overline{DE} = \frac{1}{2} \bullet \overline{AB}.$$

Teorema 2.

In un trapezio si dimostra che il segmento che unisce i punti medi dei lati obliqui è uguale alla semisomma delle basi.



Ip: $\overline{AE} = \overline{ED} \quad e \quad \overline{BF} = \overline{FC}$

Th: $\overline{EF} = \frac{1}{2} \bullet (\overline{AB} + \overline{DC})$

Dimostrazione:

Per andare da E a F i percorsi possibili sono due: il primo da E ad A, da A a B, da B a F. Pertanto si ha

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF},$$

il secondo percorso è da E a D, da D a C, da C a F. Quindi si ha

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}.$$

Sommando membro a membro si ha:

$$2 \bullet \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \qquad (2)$$

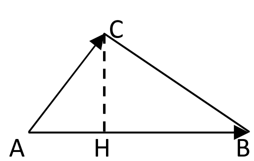
essendo $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$ perché vettori opposti, e $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$ perché opposti. Passando ai moduli dei vettori dalla (2) si ha che

$$\overline{EF} = \frac{1}{2} \bullet (\overline{AB} + \overline{DC}).$$

Inoltre, i vettori ci suggeriscono una semplice elegante dimostrazione dei teoremi di Euclide e di Pitagora.

1° teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo il quadrato di un cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per la proiezione del cateto sull'ipotenusa.



Ip: ABC triangolo rettangolo

Th: $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \bullet \overline{AH}$

$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \bullet \overline{HB}$

Dimostrazione:

Consideriamo AC e AB come vettori. Il loro prodotto scalare è

$$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AC}| \bullet \overline{AC} = \overline{AC}^2$$

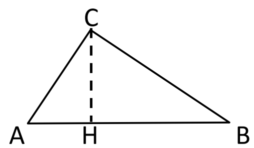
oppure $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \bullet \overline{AH} = \overline{AB} \bullet \overline{AH}$

da cui uguagliando i secondi membri $\boldsymbol{\overline{AC}^2 = \overline{AB} \bullet \overline{AH}}$

Analogamente si dimostra che $\overline{BC}^2 = \overline{AB} \bullet \overline{HB}$.

Teorema di Pitagora

In un triangolo rettangolo la somma dei quadrati dei cateti è uguale al quadrato dell'ipotenusa.



Ip: ABC triangolo rettangolo

Th: $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$

Dimostrazione:

Per il primo teorema di Euclide si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH} \bullet \overline{AB} \qquad (1)$$

e

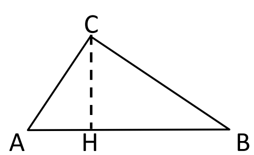
$$\overline{BC}^2 = \overline{HB} \bullet \overline{AB} \qquad (2)$$

Sommando membro a membro la (1) con la (2) si ha

$$\boldsymbol{\overline{AC}^2} + \boldsymbol{\overline{BC}^2} = \overline{AH} \bullet \overline{AB} + \overline{HB} \bullet \overline{AB} = \overline{AB} \bullet (\overline{AH} + \overline{HB}) = \overline{AB} \bullet \overline{AB} = \boldsymbol{\overline{AB}^2}.$$

2° teorema di Euclide

In un triangolo rettangolo il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è uguale al prodotto delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa .



Ip: ABC triangolo rettangolo

Th: $\overline{CH}^2 = \overline{AH} \bullet \overline{HB}$

Dimostrazione:

Per il primo teorema di Euclide si ha $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \bullet \overline{AH}$, mentre per Pitagora $\overline{CH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AH}^2$.

Pertanto $\boldsymbol{\overline{CH}^2} = \overline{AC}^2 - \overline{AH}^2 = \overline{AB} \bullet \overline{AH} - \overline{AH}^2 = \overline{AH} \bullet (\overline{AB} - \overline{AH}) = \boldsymbol{\overline{AH}} \bullet \boldsymbol{\overline{HB}}$.