MATRICI E DETERMINANTI

§ 1. MATRICI

Si ha la seguente

Definizione 1: Un insieme di numeri , reali o complessi, ordinati secondo righe e colonne è detto ***matrice*** di ordine ***m x n***, ove ***m*** è il numero delle righe e ***n*** il numero delle colonne.

Una matrice di numeri viene indicata con una lettera maiuscola ***A*** oppure col simbolo $\boldsymbol{A_{mxn}}$ e scritta in generale nel modo seguente

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \dots & a_{3,j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{cases} i = 1,2,3,4,5, \dots\dots, m \\ j = 1,2,3,4,5, \dots\dots, n \end{cases}$$

dove *i* e *j* sono indici che indicano rispettivamente le righe e le colonne.

Il generico *elemento* della *matrice* $\boldsymbol{A_{mxn}}$ si indica con $\boldsymbol{a_{ij}}$

La n-pla ordinata $(a_{i1}, \quad a_{i2}, \quad \cdots, \quad a_{in})$ si chiama **riga** i-esima. La m-pla ordinata $(a_{1j}, \quad a_{2j}, \quad \cdots, \quad a_{mj})$ si chiama **colonna** j-esima.

Questi numeri (elementi di una matrice) sono rappresentati tutti da una stessa lettera minuscola $\boldsymbol{a_{i,j}}$ munita di due indici, il primo dei quali indica la riga, *i* , mentre il secondo indica la colonna, *j* , a cui l'elemento appartiene. Esso occupa, dunque, la posizione individuata dall'intersezione tra la *i-esima* riga e la *j-esima* colonna della matrice. Per esempio l'elemento $\boldsymbol{a_{32}}$ occupa la posizione individuata dall'intersezione tra la terza riga e la seconda colonna della matrice.

Se il numero delle righe ***m*** è uguale al numero delle colonne ***n***, cioè se ***m = n***, allora la matrice si dice ***quadrata*** di ordine *n* (o *m*) con $n^2=m^2$ elementi. Una matrice quadrata viene indicata brevemente nel modo seguente

$$\boldsymbol{A = (a_{ij})} \qquad \text{con } i = j = 1,2,3,\dots,n$$

Mentre la matrice è ***rettangolare*** di ordine *m* x *n* se ***m≠n***.

Esempi

a) di matrice rettangolare $A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad m = 2$ *e* $n = 3$

b) di matrice quadrata $A_{3x3} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$, $m = n = 3$

In una matrice quadrata si individua la ***diagonale principale*** e la ***diagonale secondaria***.

La diagonale principale è formata dagli elementi

$$a_{11}, \quad \dots, \quad a_{ii}, \quad \dots, \quad a_{nn};$$

mentre la diagonale secondaria dagli elementi

$$a_{n1}, \quad \dots, \quad a_{i,n-i+1}, \quad \dots, \quad a_{1n} .$$

1.1 MATRICE NULLA

Definizione 2: una matrice si dice ***nulla*** se ha nulli tutti i suoi elementi, e si scrive:

$A = 0$.

Esempio

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 MATRICI DELLO STESSO TIPO

Definizione 3: due matrici A e B si dicono dello ***stesso tipo*** quando hanno lo stesso numero di righe e di colonne.

Esempio

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ e $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sono matrici dello stesso tipo 3x2

1.3 MATRICI CORRISPONDENTI

Definizione 4: in due matrici A e B dello stesso tipo, gli elementi di ugual posto si dicono ***corrispondenti***.

Esempio

In $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ gli elementi corrispondenti sono a_{11} e b_{11}, a_{12} e b_{12} e cosi via.

1.4 MATRICI UGUALI

Definizione 5: due matrici dello stesso tipo, A e B, si dicono ***uguali*** quando tutti gli elementi corrispondenti sono uguali, e si scrive:

$$A = B$$

Esempio

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ e $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ sono matrici uguali.

1.5 MATRICE RIGA

Definizione 6: si chiama ***matrice*** (o vettore) ***riga*** una matrice con un'unica riga, cioè una matrice di tipo (1,*n*).

Esempio di matrice riga: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1.6 MATRICE COLONNA

Definizione 7: si chiama ***matrice*** (o vettore) ***colonna*** una matrice con un'unica colonna, cioè una matrice di tipo (*m*,1).

Esempio di matrice colonna: $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1.7 MATRICE DIAGONALE

Definizione 8: una matrice quadrata *A* si dice ***diagonale*** quando tutti gli elementi sono uguali a zero tranne quelli che si trovano sulla diagonale principale.

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale 3x3.

1.8 MATRICE DIAGONALE SUPERIORE

Definizione 9: una matrice quadrata *A* di ordine *n* si dice ***triangolare superiore*** se sono nulli tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale.

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice triangolare superiore.

1.9 MATRICE DIAGONALE INFERIORE

Definizione 10: una matrice quadrata A di ordine n si dice ***triangolare inferiore*** se sono nulli tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale.

Esempio

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice triangolare inferiore.

Si osservi che una matrice diagonale è sia triangolare inferiore sia triangolare superiore.

1.10 MATRICE TRASPOSTA

Definizione 11: data una qualunque matrice A di ordine $m \times n$ si definisce ***trasposta*** di A e la si indica con $\boldsymbol{A^T}$ la matrice di ordine $n \times m$ ottenuta da A scambiando le righe con le colonne.

In altre parole la prima riga di A diventa la prima colonna di B, la seconda riga di A diventa la seconda colonna di B, e cosi via.

<u>Esempi</u>

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 2 \\ -3 & 1 & -2 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

1.11 MATRICE SIMMETRICA

Definizione 12: una matrice A di ordine $m \times n$ si dice ***simmetrica*** se $\boldsymbol{A = A^T}$**.**

<u>Esempio</u>

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ e $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ sono uguali per cui A è una matrice simmetrica.

1.12 MATRICE IDENTICA

Definizione 13: una matrice quadrata A di ordine n si dice ***identica*** o ***unitaria*** quando tutti i suoi elementi sono nulli tranne gli elementi che si trovano sulla diagonale principale che sono tutti uguali a 1. La matrice identica viene indicata con I.

Ovviamente **A x I= I x A = A** per ogni matrice quadrata A.

Esempio

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice identica I_3 di ordine 3 (diagonale principale con gli elementi uguali ad uno).

1.13 MATRICE INVERSA

Per le matrici quadrate si ha la seguente

Definizione 14: data una matrice A di ordine n, se esiste una matrice B di ordine n tale che

A x B = B x A = I ,

si dice che B è la ***matrice inversa*** di A .

§ 1.1 OPERAZIONI CON LE MATRICI DELLO STESSO TIPO

1.1.1 SOMMA

Per poter effettuare la somma fra matrici bisogna che queste siano dello stesso tipo, cioè che abbiano stesso numero di righe e di colonne.

Sia A_{mxn} l'insieme delle matrici mxn. In esso viene definito l'operazione somma '+' nel modo seguente:

Alle matrici dello stesso tipo A = (a_{ij}) e B = (b_{ij}) si fa corrispondere la matrice C = $(c_{ij} = a_{ij} + b_{ij})$

Vale a dire che gli elementi della matrice somma C si ottengono sommando gli elementi corrispondenti delle due matrici A e B.

Esempio

Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Si ha

$$A + B = C = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+4 & 0+2 \\ 4+6 & 3+(-1) & -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 10 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si osservi che la matrice somma C è ancora dello stesso tipo di A e di B; l'operazione somma '+' è, allora, interna all'insieme delle matrici dello stesso tipo A_{mxn} .

PROPRIETA' DELLA SOMMA FRA MATRICI DELLO STESSO TIPO

1.1.1.1 Proprietà Commutativa

Siano A e B matrici m x n risulta A + B = B + A.

<u>Esempio</u>

Verifichiamo la proprietà commutativa rispetto alle matrici

Siano $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ due matrici 2x3

Risulta $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 3+3 & 5-4 \\ 1+2 & 5+1 & 9+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

$$B + A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 & 3+3 & -4+5 \\ 2+1 & 1+5 & 0+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

da cui A + B = B + A

1.1.1.2 Proprietà Associativa

Siano A , B , C matrici di dimensione m x n risulta

A + (B + C) = (A + B) + C

<u>Esempio</u>

Verifichiamo la proprietà associativa rispetto alle seguenti matrici

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Risulta $A + (B + C) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

$$(A + B) + C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

da cui A + (B + C)=(A + B) + C

1.1.1.3 Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma

Sia A una matrice m x n, per la definizione 2 esiste la **matrice nulla,** che indichiamo con **0,** di dimensione m x n avente tutti gli elementi uguali a zero, tale che

A + 0 = 0 + A = A

la matrice nulla 0 è detta ***elemento neutro*** rispetto alla somma.

<u>Esempio</u>

Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e la matrice nulla di egual dimensione.

Risulta $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1.1.1.4 Esistenza dell'opposto

Per ogni matrice A di ordine *m x n* esiste una matrice denotata con $-A$, tale che $A + (-A) = 0$

$-A$ è detta **matrice opposta** di A e si ottiene da A cambiando ordinatamente di segno i suoi elementi

$$-A = (-a_{ij}) \qquad \forall i, \forall j$$

Vale, dunque, la seguente

> **Definizione 15**: data una matrice A_{mxn} di ordine *mxn*, si dice ***matrice opposta*** di A_{mxn} la matrice B_{mxn} dello stesso ordine *mxn* tale che
>
> $$A + B = B + A = 0\,,$$
>
> dove con lo zero si intende la matrice nulla .

Inoltre $$B = -A = (-a_{ij})$$

Da quanto detto sopra si ha che **l'insieme delle matrici A_{mxn} dotato dell'operazione interna '+', cioè (A_{mxn} , +), è una struttura di gruppo commutativo.**

Esempio

Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice opposta di A è data da

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Risulta

$$A + (-A) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

1.1.2 PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UNO SCALARE

Dato un numero reale k (detto scalare) ed una matrice A = ($a_{i,j}$), si definisce prodotto della matrice A per lo scalare k la matrice indicata con k A il cui generico elemento è k $a_{i,j}$, cioè kA si ottiene moltiplicando tutti gli elementi di A per k.

Si ha, dunque, $$\boldsymbol{kA = (ka_{ij})}.$$

Esempio

Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ e lo scalare k = 3

$$k\,A = \begin{pmatrix} 3x1 & 3x4 & 3x2 \\ 3x0 & 3x(-2) & 3x1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che $(-1)xA = -A$, ovvero il prodotto tra lo scalare -1 e la matrice A dà come risultato la matrice opposta di A.

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO PER UNO SCALARE

Anche nel caso del prodotto per uno scalare è immediato verificare le seguenti proprietà:

Per ogni matrice A,B di dimensione m x n e per ogni k,h numeri reali risulta

1.1.2.1) $(k + h)A = k\,A + h\,A$

1.1.2.2) $k(A + B) = k\,A + k\,B$

1.1.2.3) $(k\,h)A = k\,(h\,A)$

1.1.2.4) $1\,A = A$

Osservazione

- Essendo i ***vettori*** particolari matrici (con una sola riga e quindi del tipo *1xn* oppure con una sola colonna del tipo *mx1*) valgono per essi le stesse operazioni con le relative proprietà.

- L'insieme delle matrici m x n dotato delle 2 operazioni di somma e prodotto per uno scalare con le relative proprietà è uno ***spazio vettoriale.***

1.1.3 PRODOTTO TRA MATRICI

Per effettuare il prodotto tra due matrici è necessario che il numero delle colonne della prima sia uguale al numero delle righe della seconda. Vale a dire che se la matrice ***A*** è di ordine $\boldsymbol{mxn}$ allora la matrice ***B*** deve essere di ordine $\boldsymbol{nxp}$.

Sia *A* una matrice *m x n* e *B* una matrice *n x p*, si ha la seguente

Definizione 16: si definisce ***prodotto*** tra le matrici *A e B* la matrice $C = A\,B$ il cui generico elemento $c_{i,j}$ è la somma dei prodotti degli elementi della i-esima riga di A per i corrispondenti elementi della j-esima colonna di B, ovvero

$$c_{ij} = \sum_{z=1}^{n} a_{iz}\, b_{zj}$$

il prodotto tra la i-esima riga di *A* e la j-esima colonna di *B* così definito è detto *prodotto scalare* .

La matrice prodotto *C* è di ordine ***mxp***, cioè ha tante righe quante sono le righe di *A* e tante colonne quante sono le colonne di *B*.

$$\boldsymbol{A_{mxn} x B_{nxp} = C_{mxp}}$$

Il prodotto tra matrici è anche detto *prodotto riga colonna*.

Esempio

Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ di ordine 3x2 e $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ di ordine 2x4

Poichè A è di ordine 3x2 e B di ordine 2 x 4 è possibile eseguire il prodotto tra queste due matrici e l'ordine di C = A B è 3 x 4 (il numero delle righe di A per il numero delle colonne di B).

Vediamo come si determina tale matrice. Calcoliamone tutti gli elementi.

L'elemento di posto c_{11} è dato dal prodotto scalare tra la prima riga di A e la prima colonna di B ovvero:

$$c_{11} = (2 \quad 1)x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2x0 + 1x1 = 1$$

L'elemento di posto c_{12} è dato dal prodotto scalare tra la prima riga di A e la seconda colonna di B ovvero:

$$c_{12} = (2 \quad 1)x\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2x2 + 1x6 = 10$$

L'elemento di posto c_{13} è dato dal prodotto scalare tra la prima riga di A e la terza colonna di B ovvero:

$$c_{13} = (2 \quad 1)x\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2x3 + 1x4 = 10$$

L'elemento di posto c_{14} è dato dal prodotto scalare tra la prima riga di A e la quarta colonna di B ovvero:

$$c_{14} = (2 \quad 1)x\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 2x5 + 1x(-1) = 9$$

L'elemento di posto c_{21} è dato dal prodotto scalare tra la seconda riga di A e la prima colonna di B ovvero:

$$c_{21} = (4 \quad 3)x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4x0 + 3x1 = 3$$

L'elemento di posto c_{22} è dato dal prodotto scalare tra la seconda riga di A e la seconda colonna di B ovvero:

$$c_{22} = (4 \quad 3)x\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 4x2 + 3x6 = 24$$

L'elemento di posto c_{23} è dato dal prodotto scalare tra la seconda riga di A e la terza colonna di B ovvero:

$$c_{23} = (4 \quad 3)x \binom{3}{4} = 4x3 + 3x4 = 24$$

L'elemento di posto c_{24} è dato dal prodotto scalare tra la seconda riga di A e la quarta colonna di B ovvero:

$$c_{24} = (4 \quad 3)x \binom{5}{-1} = 4x5 + 3x(-1) = 17$$

L'elemento di posto c_{31} è dato dal prodotto scalare tra la terza riga di A e la prima colonna di B ovvero:

$$c_{31} = (-2 \quad -1)x \binom{0}{1} = -2x0 + (-1)x1 = -1$$

L'elemento di posto c_{24} è dato dal prodotto scalare tra la seconda riga di A e la quarta colonna di B ovvero:

$$c_{32} = (-2 \quad -1)x \binom{2}{6} = -2x2 + (-1)x6 = -10$$

L'elemento di posto c_{33}è dato dal prodotto scalare tra la terza riga di A e la terza colonna di B ovvero:

$$c_{33} = (-2 \quad -1)x \binom{3}{4} = -2x3 + (-1)x4 = -10$$

L'elemento di posto c_{34} è dato dal prodotto scalare tra la terza riga di A e la quarta colonna di B ovvero:

$$c_{34} = (-2 \quad -1)x \binom{5}{-1} = -2x5 + (-1)x(-1) = -9$$

La matrice prodotto è

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 10 & 9 \\ 3 & 24 & 24 & 17 \\ -1 & -10 & -10 & -9 \end{pmatrix}$$

di ordine 3x4.

Osservazione

Con riferimento alle matrici A e B dell'esempio precedente non è possibile effettuare il prodotto B A in quanto considerandone le dimensioni (2 x 4) e (3 x 2) il numero delle colonne di A non è uguale al numero delle righe di B.

Risulta in generale **AB≠BA**.

<u>Da ricordare</u>:

- *Il prodotto tra matrici* ***NON E' SEMPRE*** *eseguibile*

§ 1.3 COMPLEMENTO ALGEBRICO DI UNA MATRICE

Siano $m > 1$ ed $n > 1$; si fissi un elemento qualsiasi a_{ij} di una matrice A di ordine m x n. Si ha la seguente

Definizione 18: Si definisce ***complemento algebrico***, e lo si indica con $\boldsymbol{A_{ij}}$, il minore complementare preso con il suo segno se la somma i+j è pari e con il segno cambiato se la somma i+j è dispari.

Esempio

Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & -4 & 3 \\ \frac{1}{3} & 5 & 1 \end{pmatrix}$ una matrice 3x3. $M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -1 - \frac{2}{9} = -\frac{11}{9}$,

$A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{11}{9}$ essendo 2+2=4 pari,

$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 5 \end{vmatrix} = -\frac{17}{3}$, $\quad A_{23} = -M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ \frac{1}{3} & 5 \end{vmatrix} = \frac{17}{3}$ essendo 2+3=5 dispari.

§ 2. DETERMINANTI

Quando la matrice è **quadrata**, cioè risulta $m = n$, essa esprime un numero, o meglio ad una matrice quadrata si fa corrispondere un numero che viene detto ***determinante*** della matrice. Il ***determinante*** di una matrice viene indicato col simbolo ***det A,*** oppure col simbolo $|\boldsymbol{A}|$, e scritto nel modo seguente

$$det\,A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Si ha, dunque, la seguente

Definizione 19: Se una matrice A è quadrata allora ad essa viene associato un numero detto ***determinante*** di A e si denota con ***det* A** oppure con $|\boldsymbol{A}|$.

Se n=1, cioè se $A = (a_{11})$, allora il numero a_{11} si dice *determinante* di A e si scrive

$$det\ \mathrm{A} = |a_{11}| = a_{11}.$$

Di un determinante si individuano una ***diagonale principale*** e una ***diagonale secondaria***, ***righe*** (1^ riga, 2^ riga e cosi via a partire dall'alto verso il basso) e ***colonne*** (1^, 2^ colonna e cosi via a partire da sinistra a destra):

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} 1\text{^}col. & 2\text{^}col. & 3\text{^}col. \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{matrix} & \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{matrix} \rightarrow 1\text{^}riga \\ \rightarrow 2\text{^}riga \\ \rightarrow 3\text{^}riga \end{matrix} \end{array}$$

diagonale secondaria *diagonale principale*

§ 2.1 CALCOLO DEI DETERMINANTI DI UNA MATRTICE

Vediamo come si calcola il determinate di una matrice quadrata.

2.1.1 Determinante di matrice di ordine n = 2 (2x2).

Si ottiene effettuando la differenza tra il prodotto dei termini della diagonale principale e il prodotto dei termini della diagonale secondaria.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} x a_{22} - a_{12} x a_{21}$$

<u>**Esempio**</u>

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow det\, A = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = (-2)x(-4) - (4)x(5) = 8 - 20 = -12$$

2.1.2 Determinante di matrice di ordine n = 3 (3x3).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow det\, A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ci sono più modi per calcolare il determinante di una matrice 3x3.

1) **Regola di SARRUS**

Accanto al determinante della matrice quadrata A si scrivono le prime due colonne ottenendosi tre diagonali "principali" e tre diagonali "secondarie". Il numero che corrisponde al determinante è dato dalla differenza tra la somma dei prodotti dei termini di ciascuna diagonale principale e la somma dei prodotti dei termini di ciascuna diagonale secondaria.

La regola di Sarrus dice, passaggio per passaggio:

- Si fa il prodotto dei termini di ciascuna diagonale principale (tre prodotti: dall'alto verso il basso in diagonale)
- Si fa la somma dei tre prodotti delle diagonali principali

- Si fa il prodotto dei termini di ciascuna diagonale secondaria (tre prodotti: dal basso verso l'alto in diagonale)
- Si fa la somma dei tre prodotti delle diagonali secondarie
- **Si effettua la differenza tra la somma dei tre prodotti delle diagonali principali e la somma dei tre prodotti delle diagonali secondarie.**

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= (\, a_{11}xa_{22}xa_{33} + a_{12}xa_{23}xa_{31} + a_{13}xa_{21}xa_{32}) - (a_{13}xa_{22}xa_{31} + a_{11}xa_{23}xa_{32} + \\ + a_{12}xa_{21}xa_{33}).$$

<u>Esempio</u>

A = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{det\,A} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{matrix} = (0x(-3)x1 + (-1)x6x5 + 4x2x1) - (4x(-3)x5 + 0x6x1 + (-1)x2x1 = (-30+8) - (-60-2) = (-22) - (-62) = \mathbf{40}$$

2) Regola con i complementi algebrici

Per calcolare il determinante di una matrice di ordine superiore al secondo si sceglie una linea (riga o colonna) e si fa la somma dei prodotti degli elementi della linea per i rispettivi complementi algebrici.

Riprendiamo la stessa matrice dell'esempio precedente A = $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Scegliamo la prima riga

$$\boldsymbol{det\,A} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{0x}\begin{vmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{vmatrix} - (\mathbf{-1})\mathbf{x}\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} \end{vmatrix} + \mathbf{4x}\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{5} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{2 - 30 + 68 = 40}$$

(è – perché -1 appartiene alla prima riga e alla seconda colonna per cui 1+2=3 dispari)

(Tale prodotto non si intende scalare ma 4 moltiplicato per il complemento algebrico $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ = 17 e quindi 68)

Il metodo con i complementi algebrici viene applicato alle matrici di ordine superiore a tre.

§ 2.2 ULTERIORI MATRICI PARTICOLARI

2.2.1 MATRICE SINGOLARE

Definizione 20: Una matrice A quadrata di ordine n si dice ***singolare*** o ***degenere*** se il suo determinante è nullo: **detA=0.**

2.2.2 MATRICE INVERSA

Definizione 21: Una matrice A quadrata di ordine n si dice invertibile se esiste una matrice B quadrata di ordine n tale che

$$A \times B = B \times A = I_n$$

Dove I_n è la matrice identica. La matrice B dicesi ***inversa*** di A, eviene indicata col simbolo A^{-1}.

$$B=A^{-1}$$

Quindi $$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n$$

OSSERVAZIONE

Come per i numeri non si può fare l'inverso di zero, cosi per le matrici con determinante nullo, cioè per le matrici singolari, non si può fare l'inversa.

Per calcolare la matrice A^{-1} inversa di A si devono seguire i seguenti passaggi:

1. Si calcola il valore del determinante di A. Se detA≠0 si può procedere al punto 2.
2. Si calcola la trasposta A^T di A;
3. Per ogni elemento di A^T si calcola il complemento algebrico;
4. Si considera ogni complemento algebrico come elemento. L'insieme di tali elementi origina una nuova matrice che indichiamo per comodità A' che viene detta ***aggiunta*** di A;
5. Si divide ogni elemento di A' per il determinate di A, cioè per detA, e si ottiene la matrice A^{-1} inversa di A.

Esempio

Sia $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calcolo il detA= -5≠0
2. Calcolo A^T la trasposta di A: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1+4=5$
3. Calcolo per ogni elemento il complemento algebrico
   $C_{11}=5$, $C_{12}= -5$, $C_{13}=0$, $C_{21}=0$, $C_{22}= -1$, $C_{23}=2$, $C_{31}= -5$, $C_{32}=3$, $C_{33}= -1$;
4. Si ha la matrice A' aggiunta di A: $A'=\begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;
5. Si divide ogni elemento di A' per detA= -5 e si ottiene la matrice A^{-1} inversa di A:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 1 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Si dimostra facilmente che la matrice inversa, se esiste, è unica. Infatti si ha il seguente

2.1 TEOREMA

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se il det$A \neq 0$ allora la matrice inversa è unica.

Dim. Sia B la matrice inversa di A per cui $AxB=BxA=I_n$. Supponiamo per assurdo che esista un'altra matrice inversa di A. Sia questa B' per cui $AxB'=B'xA=I_n$.

Da $B'=I_nxB'=(BxA)xB'=Bx(AxB')=BxI_n=B$. Dunque l'inversa è unica.

Si ha l'importante

2.2 TEOREMA di BINET

Siano A e B due matrici quadrate di ordine n. Allora

$$\mathrm{Det}AxB = \det A \times \det B$$

Corollario (del teorema di Binet)

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Allora se A è invertibile allora si ha che det$A^{-1} \neq 0$.

Dim. Da se A è invertibile allora det$A \neq 0$.

Ma per il teorema di Binet si ha: $1 = \det In = \det AxA^{-1} = \det A \times \det A^{-1}$.

Poiché det $A \neq 0$ allora necessariamente anche det$A^{-1} \neq 0$.

2.2.3 MATRICE ORTOGONALE

Definizione 21: Si dice che una matrice quadrata A di ordine n è ortogonale se la sua trasposta e la suainversa sono uguali: $A^T = A^{-1}$.

Si hanno i seguenti:

2.3 TEOREMA

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se A è ortogonale allora det$A = \pm 1$.

Dim. Poiché A è ortogonale segue che $A^T=A^{-1}$ e $AxA^T=I_n$. Tenendo conto che det$A$= detA^T si ha:

$$1=\det I_n=\det A \times \det A^T=(\det A)^2 \text{ da cui } \det A==\pm 1.$$

Il viceversa non è vero.

2.4 TEOREMA

Sia A una matrice quadrata di ordine n.
A è ortogonale se e solo se valgono le due proposizioni:
1) la somma dei quadrati degli elementi di una riga (o colonna) è uguale a 1;
2) la somma algebrica dei prodotto degli elementi corrispondenti di due righe (o di due colonne) è uguale a 0.

Esempio

Sia la matrice quadrata $A=\begin{pmatrix} \text{sen}\vartheta & \cos\vartheta \\ -\cos\vartheta & \text{sen}\vartheta \end{pmatrix}$, A è ortogonale in quanto la somma dei quadrati degli elementi della prima riga $\text{sen}^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$, mentre la somma algebrica del prodotto $\text{sen}\vartheta(-\cos\vartheta) + \cos\vartheta\text{sen}\vartheta = 0$.

2.2.4 MINORE DI UNA MATRICE

Definizione 22: Sia A una matrice mxn (in simboli A_{mxn}), Si dice ***sottomatrice*** di A la matrice B_{rxs} ottenuta da A rimuovendo m-r righe e n-s colonne.

Quando r = s allora la sottomatrice è quadrata. In tal caso si ha la seguente

Definizione 23: Si dice ***minore*** di una matrice A il determinante di una sottomatrice quadrata estraibile da A. L'ordine della sottomatrice di cui si calcola il determinante viene detto ***ordine del minore***.

Osservazioni

1. Quando da A si toglie una sola riga e una sola colonna (la i-esima riga e la j-esima colonna) allora il **minore** si dice ***complementare***;
2. Quando da A si tolgono le ultime m-r righe e le n-r colonne allora il **minore** si dice ***principale***.

<u>Esempio</u>

Sia $A_{3x4} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 9 \\ -12 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

Sottomatrici: $B_{1x1} = (-12)$ (ho tolto due righe r = 2 e tre colonne s = 3)

Ma ci sono altre $C_{1x1} = (9)$ e cosi via.

Mentre $D_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ (ho tolto una riga (la 2^) e una colonna (la 2^))

Ancora $E_{1x4} = (2 \quad -1 \quad 5 \quad 9)$ (ho tolto due righe (la 2^ e la 3^) e zero colonne)

$F_{3x1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (ho tolto zero righe e tre colonne (la 1^ la 3^ e la 4^))

Infine $H_{2x2} = \begin{pmatrix} -12 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (ho tolto una riga (la 1^) e due colonne (la 3^ e la 4^))

2.2.5 RANGO DI UNA MATRICE

Definizione 24: si dice ***rango*** o ***caratteristica*** di una matrice A il **massimo ordine** dei minori non nulli estraibili da A.

<u>Esempio</u>

Consideriamo la matrice $A_{3x4} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 9 \\ -12 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

Estraiamo minori del terzo ordine (la matrice ha 3 righe e 4 colonne, per cui una sottomatrice quadrata ha al massimo ordine 3):

Eliminiamo, per esempio, la quarta colonna. Si ha la matrice quadrata $A'_{3x3}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -12 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ il cui determinante è detA' = -7≠0. Pertanto il rango della matrice è 3.

Ovviamente ci sono altri minori del terzo ordine. E' sufficiente averne trovato uno il cui determinante è diverso da zero.

Se tutti i minori del terzo ordine fossero stati nulli, saremmo passati a calcolare i minori del secondo ordine: se uno di questi ultimi fosse stato diverso da zero allora il rango sarebbe stato 2. Se anche tutti i minori del secondo ordine fossero stati nulli allora saremmo passati ai minori del primo ordine, e fra questi certamente ci sono alcuni diverso da zero e quindi il rango sarebbe stato 1.

In generale diciamo che il rango di una matrice A è k se:
• dalla matrice A si può estrarre almeno un minore di ordine k diverso da zero;
• tutti i minori di ordine maggiore di k, che si possono estrarre da A, sono tutti nulli.

Proprietà del rango:

1) ***Tetto massimo*** di r(A): Se una matrice ha m righe, n colonne, il rango deve essere minore o uguale del più piccolo fra m e n; cioè

$$\mathbf{r(A) \leq min}\ \{\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\}$$

2) r(A) non è mai negativo. Ma r(A) = 0 se e solo se A è una matrice nulla; se A non è nulla, r(A) > 0.

2.2.6 MINORE ORLATO

Sia A una matrice mxn. Si sa che il rango di A è compreso tra 1 e il minore tra m e n : 1≤ r(A) ≤ min**{**m,n**}.**

Indichiamo con H_s un minore estratto di ordine s dalla matrice A. Si ha la seguente

Definizione 25: Si dice ***minore orlato*** di H_s ogni minore di ordine s+1 avente H_s come minore estratto.

In poche parole se l'ordine di Hs e' s, allora gli orlati di Hs sono tutti i minori di ordine s+1 che lo contengono.

<u>Esempio</u>

Consideriamo la matrice $A_{3x4} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ e da questa estraiamo il minore di ordine s=2 (indicato con l'archetto) $H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$. Orliamo tale minore eliminando la 1^ colonna e otteniamo $H'_{2+1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ oppure eliminando la 2^ otteniamo $H''_{2+1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 9 & 8 \end{pmatrix}$ entrambi di ordine s+1 = 3.

Per il calcolo del rango di una matrice, per esempio di una matrice di dimensioni 3×5, per vedere se ha rango 3 utilizzando la definizione di rango, devo calcolare un minore di ordine 3 (ci sono 5 minori di ordine 3). Se questo è nullo, devo calcolare il secondo; se anche questo è nullo, devo calcolare il terzo; se anche questo è nullo, devo calcolare il quarto; se anche questo è nullo, devo calcolare il quinto; se anche questo è nullo, il rango non può essere 3 e devo vedere se vale 2 analizzando i minori di ordine 2, e cosi via.

Si può ovviare a quanto sopra ricorrendo all'importante

2.5 TEOREMA DI KRONECKER

Se una matrice A possiede una sottomatrice quadrata B di ordine k con determinante non nullo e ogni matrice orlata di B (aggiungendo una riga e una colonna) ha determinante nullo, allora il rango di A è k. Se poi una matrice orlata di B ha determinante non nullo, allora il rango di A è almeno k+1.

Calcoliamo il rango facendo ricorso al teorema di Kronecker. Partiamo da una sottomatrice B di ordine 2 con determinante non nullo (se c'è, si trova facilmente a occhio); così sappiamo che r(A) è almeno 2; per sapere se è 3, calcolo il determinante delle orlate di B (che sono solo 3); se la prima orlata ha determinante nullo, passo alla seconda; se la seconda ha determinante nullo, passo alla terza. Se anche questa ha determinante nullo, allora r(A) = 2; se invece una delle orlate ha determinante diverso da zero, r(A) è almeno 3. Ma per la proprietà del tetto massimo, r(A) ≤ 3 (perché 3 è il minimo fra m = 3 e n = 4). Allora r(A) = 3. Quindi, col teorema di Kronecker si può determinare il rango analizzando un numero di sottomatrici inferiore a quello richiesto dalla definizione di rango.

Esempio

Sia la matrice A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ di dimensioni 4x3. Il rango può essere ≤ 3. Ad occhio individuiamo una sottomatrice quadrata con determinante non nullo, per esempio B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ con detB=2≠0. Orliamo la B (eliminando la 4^ riga di A) e si ottiene $B'_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ con detB' = -6 ≠ 0. Dunque il rango di A è 2+1=3.

§3. SINTESI DELLE PROPRIETA' DELLE MATRICI

Si hanno, inoltre, le seguenti affermazioni di cui si omettono le facili dimostrazioni.

1. ***Il determinante di una matrice unitaria è uguale a 1.***
2. ***Il determinante di una matrice nulla è uguale a zero.***
3. ***Il determinante di una matrice avente almeno una riga o almeno una colonna di elementi nulli è uguale a zero.***
4. ***Il determinante di una matrice avente due righe di elementi uguali o proporzionali è uguale a zero.***
5. ***Il determinante di una matrice avente due colonne di elementi uguali o proporzionali è uguale a zero.***
6. ***Moltiplicando tutti gli elementi di una riga o di una colonna di una matrice per uno stesso numero reale k, il valore del determinante della matrice viene moltiplicato per k.***
7. ***Moltiplicando tutti gli elementi di una matrice nxn per uno stesso numero reale k, il valore del determinante della matrice viene moltiplicato per*** k^n.
8. ***Scambiando tra di loro gli elementi di due righe o di due colonne di una matrice il valore del determinante cambia di segno.***
9. ***Sostituendo gli elementi di una riga di una matrice con la somma degli elementi di questa riga con gli elementi corrispondenti di un'altra riga, il valore del determinante non cambia. Lo stesso accade per gli elementi di una colonna.***

10. ***det*** A^T ***= det A***

12. ***Il determinante di una matrice triangolare (una matrice con tutti zero sopra o sotto la diagonale principale) è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale.***
13. ***Lo stesso vale, ovviamente, anche per una matrice diagonale (ha elementi nulli sopra e sotto la diagonale principale).***