§1. Sistemi di equazioni lineari

§1.1 Considerazioni preliminari

I sistemi lineari sono sistemi di equazioni di primo grado in più incognite. Molti problemi di matematica e fisica portano alla soluzione di tali sistemi.
La teoria dei sistemi di equazioni lineari si ricollega alla teoria delle matrici e delle trasformazioni lineari sugli spazi vettoriali.
La trattazione che segue è riferita al campo complesso $\mathbb{C}$ ma può essere ovviamente riferita ad un campo qualunque.
Consideriamo un sistema di m equazioni lineari ad n incognite del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Gli $\boldsymbol{a_{ij}}$, con i = 1,2,…,m e j = 1,2,…n, si chiamano ***coefficienti del sistema***, gli $\boldsymbol{x_k}$, dove k = 1,2,…n, si chiamano ***incognite del sistema*** ed i $\mathbf{b_i}$ si chiamano ***termini noti***. Sia gli $\boldsymbol{a_{ij}}$ sia gli $\boldsymbol{x_k}$ sia i $\boldsymbol{b_i}$ appartengono a $\mathbb{C}$.

§1.2 Definizioni di carattere generale

1. Se i termini b_i sono
   - tutti nulli, il sistema si dice ***omogeneo***;
   - se almeno uno di essi è diverso da zero si dice ***non omogeneo***.
2. Il sistema si dice
   - ***compatibile*** se ammette almeno una soluzione;
   - ***incompatibile*** se non ammette nessuna soluzione.
3. Un sistema compatibile si dice
   - ***determinato*** quando possiede una sola soluzione;
   - ***indeterminato*** quando possiede infinite soluzioni.

Inoltre chiameremo ***matrice incompleta*** (o dei ***coefficienti)*** del sistema la seguente

$$M_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots.\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Mentre la ***matrice completa*** del sistema è la seguente

$$M_c = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots.\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Usando la simbologia matriciale, un sistema si può scrivere nel modo seguente:

$$\mathbf{M_i X = B}$$

Dove M_i è la matrice incompleta, X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è la matrice delle incognite e B = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ è la matrice dei termini noti.

Una n-pla ordinata $(k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n)$ di elementi di $\mathbb{C}$ si chiama soluzione del sistema se sostituendo i valori di k alle incognite x (rispettivamente) tutte le equazioni del sistema vengono soddisfatte. Ogni sistema di equazioni lineari m x n è equivalente (nel senso che hanno le stesse soluzioni) ad un sistema n x n.

§1.3 TEOREMA DI CRAMER (Gabriel Cramer: Ginevra, 31 luglio 1704 – Bagnols-sur-Cèze, 4 gennaio 1752)

Se il sistema (1) è formato da n equazioni lineari in n incognite e il determinante della matrice incompleta M_i (che risulta, cosi, quadrata di ordine n) è diverso da zero allora vale il seguente

<u>TEOREMA DI CRAMER</u>
Se il determinante della matrice incompleta M_i del sistema (1) è diverso da zero, il sistema ammette una ed una sola soluzione data da $x_i = \frac{detA_i}{detM_i}$, dove x_i è la i-esima incognita e $detA_i$ è il determinante ottenuto dalla matrice M_i sostituendo la i-esima colonna con la colonna dei termini noti b_1, b_2, ….b_m.

<u>Esempio</u> Sia il sistema 3x3 (m=n=3)

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = 6 \\ 3x - 2y + 5z = 5 \\ 4x + 3y - 9z = 8 \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti è

$$detM_i = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 28$$

mentre

$$detA_1 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & -7 \\ 5 & -2 & 5 \\ 8 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 56, \qquad detA_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -7 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 84, \qquad detA_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 28$$

Per cui la soluzione del sistema è: $x = \frac{56}{28} = 2$, $y = \frac{84}{28} = 3$, $z = \frac{28}{28} = 1$

<u>OSSERVAZIONE</u>

Cramer permette in linea di principio di risolvere ogni sistema di equazioni lineari con determinante dei coefficienti non nullo. Nella pratica, quando n è abbastanza grande (> 3), però, si utilizzano altri metodi, perché Cramer si basa sulla risoluzione di determinanti, problema in generale impegnativo.

§1.4 TEOREMA DI ROUCHE' (Eugène Rouché: Sommières, 18 agosto 1832 – Lunel, 19 agosto 1910)

Sia il sistema di m equazioni lineari ad n incognite del tipo

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots\dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots\dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots\dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

e di esso consideriamo la matrice incompleta M_i

$$M_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & & \dots.\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Supponiamo che la caratteristica di M_i sia p; per definizione esiste un minore di ordine p estratto da M_i non nullo:

$$M_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2p} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & & \dots.\dots\dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots\dots\dots & a_{pp} \end{pmatrix}$$

che chiameremo ***minore fondamentale.***

Consideriamo il nuovo determinante

$$M_{af} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2p} & b_2 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots & & \dots.\dots\dots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots\dots\dots & a_{pp} & b_p \\ a_{r1} & a_{r2} & & a_{rp} & b_r \end{pmatrix}$$

ottenuto dal precedente aggiungendo una nuova riga scelta fra le m-p righe restanti in M_i e la colonna costituita dai termini noti delle equazioni del sistema aventi lo stesso posto delle righe nella matrice completa M_c. Tale nuovo determinante cosi ottenuto M_{af} è di ordine p+1 e viene detto ***minore associato al fondamentale***.

Si può enunciare ora il seguente

TEOREMA DI ROUCHE'

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammetta soluzioni è che tutti i minori associati ad uno stesso minore fondamentale siano nulli.

Le soluzioni sono ∞^{n-p}.

§1.5 TEOREMA DI CAPELLI (Alfredo Capelli: Milano, 5 agosto 1855 – Napoli, 28 gennaio 1910)

Il teorema di Rouchè fu riformulato, rendendolo più semplice nell'applicazione, dal matematico italiano Capelli:

TEOREMA DI CAPELLI

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare di m equazioni in n incognite ammetta soluzioni è che la matrice completa M_c e la matrice incompleta M_i abbiano lo stesso rango.

Per risolvere il sistema

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

si procede cosi:

1. Supponiamo sia p il rango di Mc e di Mi;
2. Si scelgono, fra le m equazioni che compongono il sistema , p equazioni qualsiasi in modo, però, che il sistema delle p equazioni in n incognite che si viene a formare abbia rango della matrice dei coefficienti uguale a p;
3. Di questo nuovo sistema si prendono p fra le n incognite in modo che i loro coefficienti formino un determinante non nullo;

4. Si attribuisce alle restanti n-p incognite, che si portano al secondo membro di ciascuna equazione, valori di parametri arbitrari;
5. Si ottiene, cosi, un sistema di Cramer di p equazioni in p incognite;
6. Si risolve quest'ultimo sistema e si ottengono le soluzioni del sistema di partenza.
7. Se p = n il sistema ammette una ed una sola soluzione;

Se p < n la soluzione generale del sistema contiene n-p parametri che possono assumere valori arbitrari. In tal caso si dice che il sistema ha grado di indeterminazione n-p ed ammette ∞^{n-p} soluzioni.

Sia un esempio per chiarire

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$$

Calcoliamo il determinante dei coefficienti

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Il sistema non è di Cramer. Estraiamo dalla matrice incompleta

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

un minore di ordine 2, per esempio

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

Il rango della matrice incompleta è, dunque, 2.

Consideriamo la matrice completa

$$M_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ci sono due minori del terzo ordine che contengono il minore D_1: uno è D che è nullo, l'altro è

$$D' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

che risulta anche nullo.

Pertanto anche la matrice completa ha rango 2. Possiamo, allora, applicare il teorema di Capelli.

Riscriviamo il sistema nel modo seguente, dopo aver scelto 2 equazioni e due incognite fra le tre, trasportando al secondo membro la terza incognita che viene considerata parametro:

$$\begin{cases} x + y = z - 1 \\ 2x = 3 - z \end{cases}$$

Le soluzioni sono ∞^1 e sono

$$\begin{cases} x = \dfrac{3 - z}{2} \\ y = \dfrac{3z - 1}{2} \end{cases}$$

§2. Sistemi lineari omogenei

Un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}x_2 + \;\dots\dots a_{1n}x_n \quad = 0 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}x_2 + \;\dots\dots a_{2n}x_n \quad = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . . \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots \dots a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ammette sempre la soluzione banale $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Per trovare eventuali soluzioni di un sistema omogeneo diverse dalla banale bisogna che il rango p della matrice dei coefficienti sia minore del numero n delle incognite. In altre parole vale il seguente altro

TEOREMA
Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema omogeneo ammetta soluzioni diverse dalla banale è che il rango p dei coefficienti sia minore del numero n delle incognite.

Il procedimento da seguire per la risoluzione del sistema è lo stesso visto in precedenza nel **§1.5.**