

MASSIMI E SUI MINIMI: QUESTIONI NUMERICHE

MASSIMI

Proposizione 1. Se la somma di due numeri positivi x e y è costante ed uguale ad s , allora il loro prodotto è massimo quando essi sono uguali.

(La proposizione è equivalente a: il quadrilatero di area massima fra quelli equiperimetrici è il quadrato)

Ipotesi: $x+y=s$,

Tesi: $x \cdot y$ è massimo quando $x=y$.

Dimostrazione: Da $x+y=s$ segue $y=s-x$. Quindi il prodotto $x \cdot y$ può scriversi $x \cdot (s-x)$. Si ha la funzione

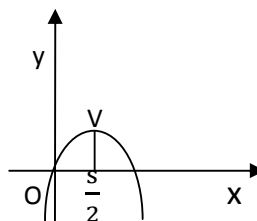
$$z = x \cdot (s - x) = -x^2 + sx$$

che esprime una parabola con la concavità

rivolta verso il basso per cui il vertice è il

punto di massimo ed ha ascissa $x = \frac{s}{2}$.

Perciò $y = s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2}$. Quindi $x = y = \frac{s}{2}$



Proposizione 2. Se la somma di due numeri positivi x e y è costante ed uguale ad s , il prodotto delle loro potenze ad esponenti positivi n e m è massimo quando i numeri sono proporzionali ai rispettivi esponenti.

Ipotesi: $x+y=s$,

Tesi: $x^n \cdot y^m$ è massimo se $\frac{x}{n} = \frac{y}{m}$.

Dimostrazione: Siano $n, m \in \mathbb{N}$. Intanto osservo che

$$\frac{x^n}{n^n} \cdot \frac{y^m}{m^m} = \left(\frac{x}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{y}{m}\right)^m = \underbrace{\left(\frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n} \dots \frac{x}{n}\right)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{\left(\frac{y}{m} \cdot \frac{y}{m} \dots \frac{y}{m}\right)}_{m \text{ volte}}$$

e

$$n \cdot \frac{x}{n} + m \cdot \frac{y}{m} = \underbrace{\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + \dots + \frac{x}{n}}_{n \text{ volte}} + \underbrace{\frac{y}{m} + \frac{y}{m} + \dots + \frac{y}{m}}_{m \text{ volte}} = \underbrace{\left(\frac{x}{n} + \frac{y}{m}\right) + \dots + \left(\frac{x}{n} + \frac{y}{m}\right)}_{n+m \text{ volte}}$$

Inoltre

$$x = n \cdot \frac{x}{n} \text{ per cui } x^n = n^n \cdot \frac{x^n}{n^n}$$

$$y = m \cdot \frac{y}{m} \text{ per cui } y^m = m^m \cdot \frac{y^m}{m^m}$$

Pertanto

$$x^n \cdot y^m = n^n \cdot m^m \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{n} \cdot \frac{y}{m} \dots \frac{x}{n} \cdot \frac{y}{m}\right)}_{n \cdot m \text{ volte}}$$

Poiché si vuole $x^n \cdot y^m$ massimo allora il membro a destra della precedente uguaglianza è massimo. Quindi $\frac{x}{n} \cdot \frac{y}{m}$ è massimo e $n \cdot \frac{x}{n} + m \cdot \frac{y}{m}$ è costante. Per la proposizione precedente si ha

$$\frac{x}{n} = \frac{y}{m}.$$

MINIMI

Proposizione 3. Se il prodotto di due numeri positivi x e y è costante allora la loro somma è **minima** quando essi sono uguali.

Ipotesi: $xy = q$ (q costante),

Tesi: $x+y$ è minima se $x=y$.

Dimostrazione: Si osservi che $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$. Affinchè $(x+y)^2$ sia minimo, anche il secondo membro deve essere tale. Ma xy , e quindi $4xy$, è costante per ipotesi per cui è sufficiente che sia minimo $(x-y)^2$. Di qui $x=y$.

Proposizione 4. Se il prodotto $x_1^a \cdot x_2^b \dots x_n^y$ di n potenze di basi positive variabili e di esponenti positivi è costante, la somma delle basi è **minima** quando esse sono proporzionali ai rispettivi esponenti.

Ipotesi: $x_1^a \cdot x_2^b \dots x_n^y = p$ (p costante),

Tesi: $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ è minima se $\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{b} = \dots = \frac{x_n}{y}$.

Dimostrazione: Per semplificare consideriamo il caso di due potenze: se $x_1^a \cdot x_2^b = \text{cost.}$ allora $x_1 + x_2$ è minima se $\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{b}$. Infatti

$$x_1 + x_2 = a \cdot \frac{x_1}{a} + b \cdot \frac{x_2}{b} = \underbrace{\frac{x_1}{a} + \dots + \frac{x_1}{a}}_{a \text{ volte}} + \underbrace{\frac{x_2}{b} + \dots + \frac{x_2}{b}}_{b \text{ volte}} = \underbrace{\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right) + \dots + \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right)}_{a+b \text{ volte}}.$$

Ma $\left(\frac{x_1}{a}\right)^a \cdot \left(\frac{x_2}{b}\right)^b = \frac{x_1^a x_2^b}{a^a b^b}$ è costante per ipotesi. Per la proposizione 3. Si ha

$$\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{b}.$$