TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Introduzione

Le considerazioni che qui sono riportate e gli appunti, che seppur scritti in modo incompleto, sono rivolti a tutti gli studenti, in particolare ai miei ragazzi.

Sono dell'opinione che i ragazzi devono essere messi in grado di acquisire un sufficiente livello di astrazione per affrontare e descrivere, attraverso opportuni modelli, la realtà che li circonda in tutti i suoi aspetti.

La geometria delle trasformazioni è relegata, quando è presente, in un capitolo a parte nei testi di matematica del biennio. Essa viene vista come un'appendice opzionale e non come parte integrante ed essenziale nello studio della geometria del piano. Dal mio punto di vista la geometria delle trasformazioni offre un ottimo percorso alternativo a quello tradizionale.

Studiando alla "vecchia maniera" la geometria, quanti studenti riescono ad ottenere risultati soddisfacenti per la propria formazione?

Una percentuale di ragazzi piuttosto bassa e lontana dalla media riesce ad affrontare un problema e a completarne la dimostrazione in modo corretto.

Si cambi, allora, percorso didattico e si studi la geometria con le trasformazioni. I ragazzi imparano meglio e vengono stimolati ad affrontare lo studio della geometria con piacere. Essi acquisiscono più consapevolezza dell'importanza della geometria nella loro formazione; acquisiscono più strumenti per indagare la realtà che li circonda; si impossessano di più tecniche nella soluzione dei problemi proposti attraverso metodi e concetti nuovi e, a mio avviso, potenti.

Il problema non è tanto nei ragazzi che non capiscono, ma nella matematica per come viene insegnata; essa va cambiata sia nel metodo sia nei contenuti rendendoli moderni, attuali e, possibilmente, concreta e agganciata alla realtà.

Bisogna incuriosire i ragazzi con un buon metodo di insegnamento della matematica ed evitare che scatti in loro la ripulsa allo studio della disciplina.

Durante la spiegazione non sarebbe male far ricorso a metafore scherzose e divertenti ma appropriate cosi da consentire all'allievo che ascolta di "… abbassare la guardia … per il tempo sufficiente a instillargli il dubbio che vi sia qualcosa che valga la pena di capire … senza chiudersi a riccio di fronte alla matematica".
(da "Narrare matematica nel fumetto" di Marco Abate, Dipartimento di Matematica, Università di Pisa)

Nicola Filipponio

Trasformazioni geometriche

§1. Consideriamo un insieme non vuoto A e una funzione f bigettiva che va da A ad A

$$f: A \rightarrow A,$$

ebbene, una tale bigezione si chiama trasformazione di A in sé.

Sia, ora, il piano euclideo π e consideriamo una funzione f bigettiva da π a π

$$f: \pi \rightarrow \pi,$$

tale bigezione si dice ***trasformazione geometrica*** del piano in sé.

Le trasformazioni geometriche consentono di definire, come vedremo in seguito, ogni oggetto geometrico (punto, retta, figura in generale) in un proprio sistema di riferimento. L'oggetto finale,risultato della trasformazione, eredita tutte le proprietà (attributi) geometriche di quello di partenza (oggetto iniziale).

In una figura geometrica soggetta a trasformazione ci sono proprietà che variano e proprietà che si conservano (distanza fra punti, allineamento, parallelismo, ecc.). Noi siamo interessati a riconoscere le proprietà che non variano.

Definizione **Le proprietà che una trasformazione conserva si chiamano *invarianti* della trasformazione**.

Intanto è opportuno riportare le altre seguenti definizioni.

Definizione **Si dice *isometria* una trasformazione del piano in sé che conserva la distanza di due punti.**

La **distanza** fra due punti A e B viene indicata con la scrittura **d(A,B).** Indichiamo con A' e B' i punti corrispondenti nell'isometria rispettivamente di A e di B. Conservare la distanza fra due punti A e B significa che

$$\mathbf{d(A,B) = d(A',B').}$$

Definizione **Si dice *collineazione* una trasformazione del piano in sé che conserva l'allineamento dei punti, nel senso che ad una retta fa corrispondere una retta.**

Ogni isometria è una collineazione.

Le trasformazioni geometriche vengono classificate in base ai loro invarianti in:

- Trasformazioni isometriche;
- Trasformazioni affini;
- Trasformazioni simili;
- Trasformazioni proiettive;
- Trasformazioni topologiche.

Le trasformazioni geometriche di cui ci occuperemo in questa unità sono quelle isometriche:

- La simmetria centrale;
- La simmetria assiale;
- La traslazione;
- La rotazione.

E' opportuno ricordare che

- Una ***figura geometrica*** è un insieme di punti.
- Una ***figura piana*** è un insieme di punti di un piano.

Si ha la seguente

Definizione **Si dice elemento *unito* di una trasformazione l'elemento che corrisponde a se stesso.**

§2. Le trasformazioni isometriche.

§2.1 Simmetria centrale

Fissiamo un punto M nel piano π, consideriamo un punto P∊ π; a P facciamo corrispondere il punto P'∊ π di modo che M risulti punto medio del segmento PP'

M

P--------• --------P'

Fig. 2.1.1

Si ottiene, cosi, la simmetria centrale. Si ha, dunque, la seguente

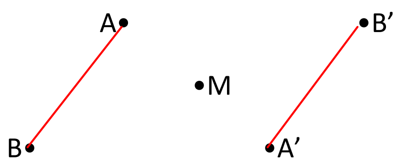
Definizione **Si dice *simmetria centrale* la trasformazione del piano in sé la quale, fissato un punto M , ad ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che M risulti punto medio di PP'. Il punto M dicesi *centro* di simmetria.**

La simmetria centrale , di solito, viene indicata con il simbolo $\mathbf{S_M}$ dove M indica il centro. E' ovvio che, fissato un punto nel piano, automaticamente viene fissata una simmetria centrale.

A) Proprietà invarianti della simmetria centrale.

La simmetria centrale

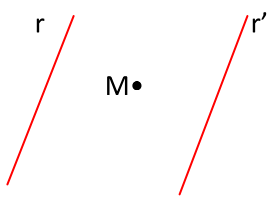
1. Conserva le distanze. E', dunque, una isometria.



d(A,B)=d(A',B')

Fig. 2.1.2

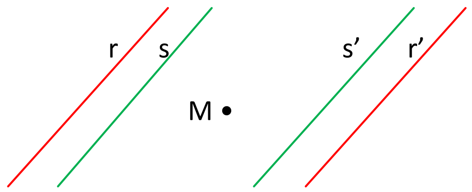
2. Trasforma retta in retta. La retta r', corrispondente di r, è parallela ad r.



r || r'

Fig. 2.1.3

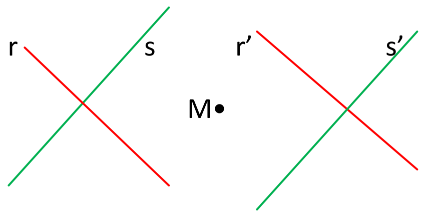
3. Conserva il parallelismo. Cioè, a rette parallele fa corrispondere rette parallele.



$r \parallel s \Longrightarrow r' \parallel s'$

Fig. 2.1.4

4. Conserva la perpendicolarità. Cioè, a rette perpendicolari fa corrispondere rette perpendicolari.

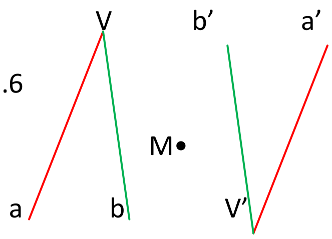


$r \perp s \Longrightarrow r' \perp s'$

Fig. 2.1.5

5. Conserva l’ampiezza degli angoli.

Fig. 2.1.6



$aVb \cong a'V'b'$

La simmetria centrale è ***involutoria*** perchè scambia tra loro punti corrispondenti: a P corrisponde P’ e a P’ corrisponde P. Cioè

$$\mathbf{S_M}(P) = P' \text{ e } \mathbf{S_M}(P') = P.$$

B) Elementi uniti della simmetria centrale.

Nella simmetria centrale **ogni retta che passa per il centro è un elemento unito**. L’unico punto unito è il centro.

§2.2 <u>Simmetria assiale</u>

Fissiamo una retta a nel piano π, consideriamo un punto P$\in$ π; a P facciamo corrispondere il punto P’$\in$ π di modo che a risulti asse del segmento PP’.

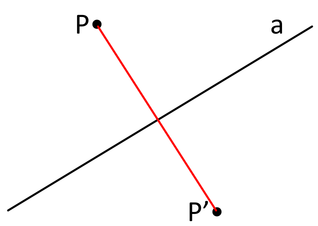


Fig.2.2.1

Si ottiene, cosi, la simmetria assiale.

Si ha, dunque, la seguente

Definizione Si dice *simmetria assiale* la trasformazione del piano in sé la quale, fissata una retta r del piano, ad ogni punto P fa corrispondere il punto P' tale che r risulti asse del segmento PP'. La retta r si dice *asse* della simmetria.

La simmetria assiale , di solito, viene indicata con il simbolo S_a dove a indica l'asse di simmetria. E' ovvio che, fissata una retta nel piano, automaticamente viene fissata una simmetria assiale.

A) Proprietà invarianti della simmetria assiale.

La simmetria assiale

1. Conserva le distanze.

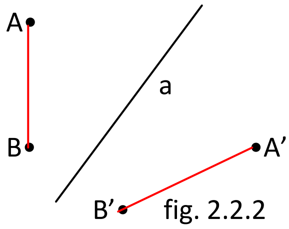


fig. 2.2.2

$d(A,B)=d(A',B')$

2. Trasforma retta in retta.

2.1. La retta r', corrispondente di r, è parallela ad r se r è parallela all'asse;

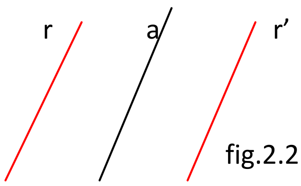
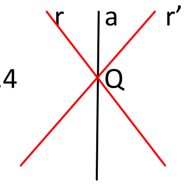


fig.2.2.3

$r \parallel a \Longrightarrow r \parallel r'$

Se la retta r interseca a in un punto Q allora anche r', corrispondente di r, interseca a nel punto Q.

fig. 2.2.4



$r \cap a = \{Q\} \Longrightarrow r' \cap a = \{Q\}$

2.2. Se la retta r è perpendicolare ad a allora r', corrispondente di r, coincide con r.

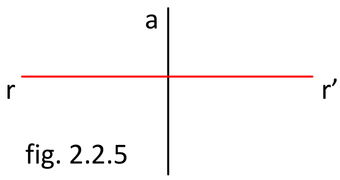


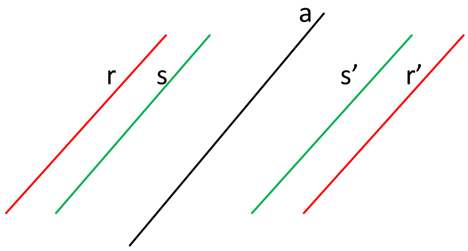
fig. 2.2.5

$r \perp a \Longrightarrow S_a(r) = r' = r$

Questo ci dice che: **ogni retta perpendicolare all'asse di simmetria è elemento unito**.

3. Conserva il parallelismo. Cioè, a rette parallele fa corrispondere rette parallele.

fig.2.2.6



$r \parallel s \Longrightarrow r' \parallel s'$

4. Conserva la perpendicolarità. Cioè, a rette perpendicolari fa corrispondere rette perpendicolari.

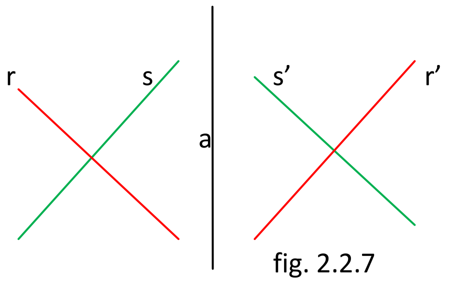


fig. 2.2.7

$r \perp s \implies r' \perp s'$

5. Conserva l'ampiezza degli angoli, ma ne cambia l'orientamento.

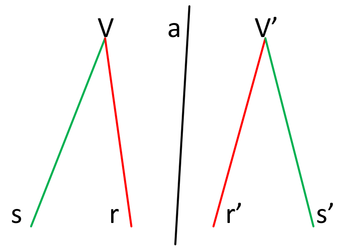


fig. 2.2 8

$sVr \cong r'V's'$

La simmetria assiale è ***involutoria:*** ad r corrisponde r' e ad r' corrisponde r.

B) Elementi uniti della simmetria assiale.

Ogni punto appartenente all'asse è elemento unito. L'asse stesso è elemento unito.
Ogni retta perpendicolare all'asse (come già si è visto più sopra) è elemento unito.

§2.3 Vettori

Per introdurre la traslazione abbiamo bisogno di fare un cenno ai vettori.
Si hanno le seguenti definizioni:

Definizione Si dice *vettore* ogni segmento orientato di cui si conosce la direzione, il verso e il modulo (la lunghezza).

Un vettore viene indicato con lettere minuscole con una freccina sopra $\vec{v}$.

Definizione Si dice *vettore nullo* il vettore di modulo zero, e viene indicato con $\vec{0}$.

Definizione Due vettori si dicono *equipollenti* quando hanno stessa direzione, stesso verso e stesso modulo.

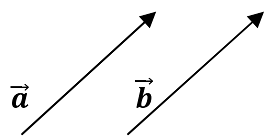


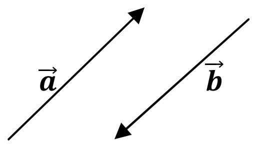
Fig. 2.3.1

$\vec{a}$ è equipollente a $\vec{b}$

E' opportuno osservare che l'equipollenza è una **relazione di equivalenza**. Pertanto, nel piano ogni vettore rappresenta una **classe di equivalenza**. La classe di equivalenza viene indicata con il simbolo $[\vec{v}]$.

<u>Definizione</u> Due vettori si dicono *opposti* quando hanno stessa direzione, stesso modulo ma verso opposto.

Fig. 2.3.2



$\vec{a}$ è opposto a $\vec{b}$

§2.4 <u>Traslazione</u>

Fissiamo un vettore $\vec{v}$ nel piano. Consideriamo un punto P$\epsilon\pi$, al punto P facciamo corrispondere il punto P' tale che il segmento $\overline{PP'}$ sia equipollente al vettore $\vec{v}$. Il punto P subisce, cosi, una traslazione assumendo la posizione di P'.
Si ha la seguente

<u>Definizione</u> Si dice *traslazione* la trasformazione del piano in sé la quale, fissato un vettore $\vec{v}$ nel piano, ad ogni punto P fa corrispondere il punto P' di modo che $\overline{PP'}$ sia equipollente al vettore $\vec{v}$.

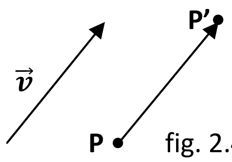


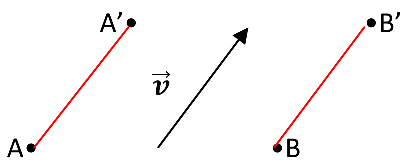
fig. 2.4.1

La traslazione, di solito, viene indicata col simbolo $\mathbf{T}_{\vec{v}}$. Fissato un vettore nel piano, automaticamente si ha una traslazione.

A) <u>Proprietà invarianti della traslazione</u>.

La traslazione

1. Conserva le distanze.



d(A,A') = d(B,B')

Fig.2.4.2

2. Trasforma retta in retta parallela.

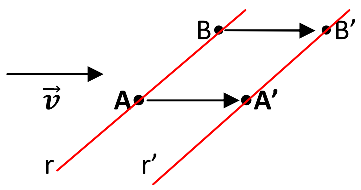
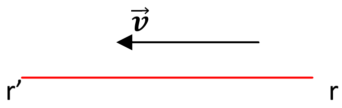


Fig. 2.4.3

$\mathbf{T}_{\vec{v}}$ **(r) = r', r||r'**

La retta r', corrispondente di r, è parallela ad r.

2.1. Se la retta r è parallela a $\vec{v}$ allora r', corrispondente di r, coincide con r.

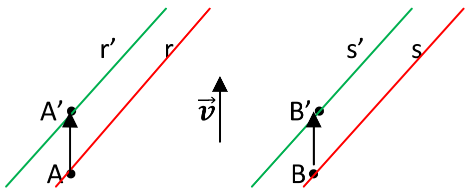


$r \parallel \vec{v} \Longrightarrow T_{\vec{v}}(r) = r' = r$

fig. 2.4.4

Questo ci dice che: **ogni retta parallela al vettore è elemento unito della traslazione.**

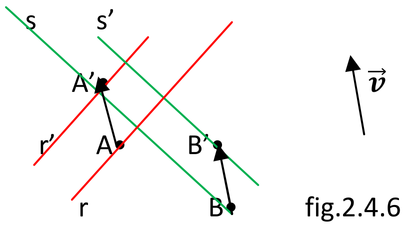
3. Conserva il parallelismo. Cioè, a rette parallele fa corrispondere rette parallele.



$r \parallel s \Longrightarrow r' \parallel s'$

Fig. 2.4.5

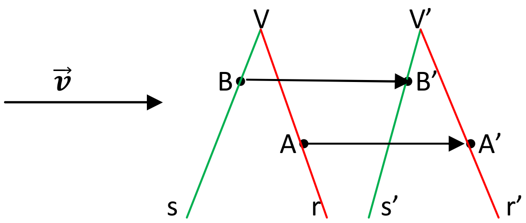
4. Conserva la perpendicolarità. Cioè, a rette perpendicolari fa corrispondere rette perpendicolari.



$r \perp s \Longrightarrow r' \perp s'$

fig.2.4.6

5. Conserva l'ampiezza degli angoli, compreso l'orientamento.



$sVr \cong s'V'r'$

fig. 2. 4.7

B) <u>Elementi uniti della traslazione</u>.

Non ci sono punti uniti nella traslazione.
Mentre, come abbiamo visto più sopra, **ogni retta parallela al vettore è unita** nella traslazione.

§3. Rotazione

Fissiamo un punto O nel piano π e consideriamo un angolo α; fissiamo anche un verso di rotazione, per esempio in senso antiorario ↶ . Al punto P∊π facciamo corrispondere il punto P'∊π tale che l'angolo POP' sia congruente ad α e OP' sia congruente a OP. Il punto P subisce, cosi, una rotazione di ampiezza α (di raggio OP) fino ad assumere la posizione di P'.

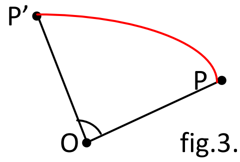


fig.3.1

$P\widehat{O}P' \cong \widehat{\alpha}$, $OP' \cong OP$

Si è ottenuta una **rotazione** nel piano. Il punto O è detto **centro** della rotazione ed α angolo di rotazione.

Si ha, pertanto, la seguente

<u>Definizione</u> Si dice *rotazione* la trasformazione del piano in sé la quale, fissato un punto O e considerato un angolo α orientato, ad ogni punto P fa corrispondere il punto P' di modo che l'angolo POP' sia congruente all'angolo α. Il punto O si dice *centro* della rotazione.

La rotazione, di solito, viene indicata col simbolo $\mathbf{R}_{(O,\alpha)}$, dove O è il centro di rotazione ed α l'angolo di rotazione. Ovviamente, viene fissato anche il verso di rotazione: in senso antiorario oppure orario.

A) <u>Proprietà invarianti della rotazione</u>.

La rotazione

1. Conserva le distanze.

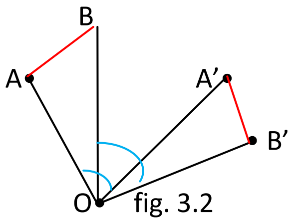


fig. 3.2

d(A,B)=d(A',B')

2. Trasforma retta in retta.

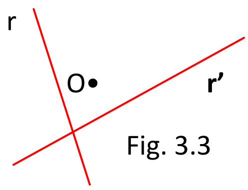


Fig. 3.3

3. Conserva il parallelismo. Cioè, a rette parallele fa corrispondere rette parallele.

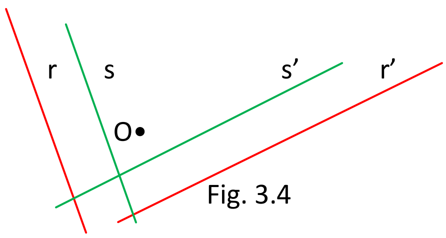


Fig. 3.4

$r \parallel s \Longrightarrow r' \parallel s'$

4. Conserva la perpendicolarità. Cioè, a rette perpendicolari fa corrispondere rette perpendicolari.

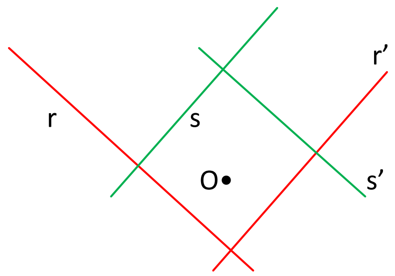


Fig. 3.5

$r \perp s \Longrightarrow r' \perp s'$

5. Conserva l’ampiezza degli angoli.

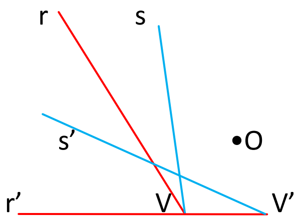


fig.3.6

$r\hat{V}s \cong s'\hat{V}'r'$

B) <u>Elementi uniti della rotazione</u>.

Non ci sono elementi uniti nella rotazione (escludendo il centro).

Una particolare rotazione è la simmetria centrale di centro l’origine degli assi e angolo α = 180°.

§4. Equazioni delle trasformazioni

§4.1 Equazioni della simmetria centrale.

Premessa.
Dati due punti $A(x_1;y_1)$ e $B(x_2;y_2)$ nel piano cartesiano, sappiamo che le coordinate del punto medio M di AB sono date dalle relazioni

$$X_M=\frac{x1+x2}{2}\ ;\quad y_M=\frac{y1+y2}{2}$$

Ora, indicati con P(x,y) e P'(x';y') i due punti corrispondenti nella simmetria centrale e con $M(x_M;y_M)$ il centro di simmetria (cioè il loro punto medio), si ha che

$X_M=\frac{x+x'}{2}$ da cui $2x_M=x+x'$

e quindi **$x'= 2x_M-x$.**

mentre da $Y_M=\frac{y+y'}{2}$ da cui $2y_M= y+y'$

e quindi **$y'= 2y_M-y$** .

Le relazioni ottenute

$$\begin{cases} x' = 2x_M - x \\ y' = 2y_M - y \end{cases} \qquad (4.1.1)$$

rappresentano le equazioni della simmetria centrale di centro un punto qualsiasi del piano.

Esempio: siano M(4;3) il centro di simmetria e A(3;-1) un punto del piano cartesiano. Le coordinate di A' corrispondente di A rispetto ad M sono date da

$$\begin{cases} x' = 2 \bullet 4 - 3 = 5 \\ y' = 2 \bullet 3 - (-1) = 7 \end{cases};\qquad A'(5;7).$$

Se, invece, il centro della simmetria è l'origine O si ha:

P(x;y) , P'(x';y')

$$\begin{cases} \mathbf{x'} = -\mathbf{x} \\ \mathbf{y'} = -\mathbf{y} \end{cases} \qquad (4.1.2)$$

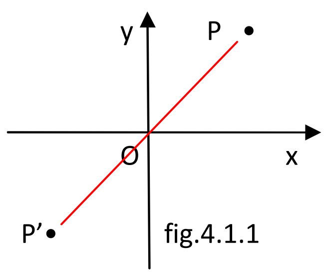


fig.4.1.1

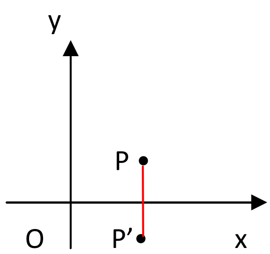
§4.2 Equazioni della simmetria assiale.

1) Rispetto all'asse delle x (riflessione rispetto all'asse delle x).

P(x;y) , P'(x';y')

$$\begin{cases} \mathbf{x'} = \mathbf{x} \\ \mathbf{y'} = -\mathbf{y} \end{cases} \qquad (4.2.1)$$

Fig. 4.2.1



2) Rispetto all'asse delle y (riflessione rispetto all'asse delle y).

P(x;y) , P'(x';y')

$$\begin{cases} \mathbf{x'} = -\mathbf{x} \\ \mathbf{y'} = \mathbf{y} \end{cases} \qquad (4.2.2)$$

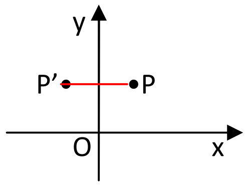


fig. 4.2.2

§4.3 Equazione della traslazione.

Si fissi un vettore $\vec{v}$ (m;n) dove m ed n sono le componenti di $\vec{v}$ lungo rispettivamente l'asse delle x e l'asse delle y; sia P(x;y) un punto del piano cartesiano. Vogliamo determinare le coordinate del punto P' corrispondente di P nella traslazione $\mathbf{T}_{\vec{v}}$; poiché PP' è equipollente a $\vec{v}$ si ha che

$$\begin{cases} \mathbf{x'} = \mathbf{x} + \mathbf{m} \\ \mathbf{y'} = \mathbf{y} + \mathbf{n} \end{cases} \qquad (4.3.1)$$

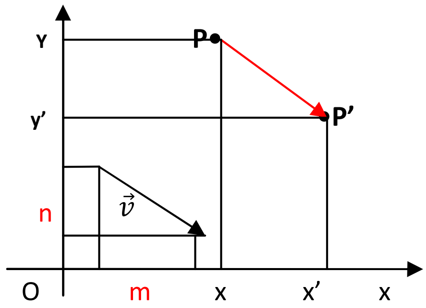


fig. 4.3.1

Esempio: Sia $\mathbf{T}_{\vec{v}}$ la traslazione di vettore $\vec{v}$(-3;2) e P(-2;-4) un punto del piano cartesiano; vogliamo determinare le coordinate del punto P' corrispondente di P nella traslazione.

Ebbene $\begin{cases} x' = -2 + (-3) = -5 \\ y' = -4 + 2 \quad = -2 \end{cases}$; P'(-5;-2).

§5. Composta (o prodotto) di trasformazioni geometriche.

Le trasformazioni, come tutte le funzioni, si possono comporre tra di loro, dando luogo ad altre trasformazioni. E' ovvio che le trasformazioni (e quindi le relative equazioni) vengono applicate in sequenza, cioè una dopo l'altra seguendo l'ordine di composizione: prima quella scritta per ultima, poi la precedente e cosi via.

La composta di due o più isometrie fra quelle esposte è ancora una isometria.

Inoltre, è facile verificare che

- ***La composta di due traslazioni di vettori rispettivamente $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è una traslazione di vettore $\vec{c}$ somma vettoriale di $\vec{a}$ e $\vec{b}$.***
- ***La composta di due rotazioni aventi lo stesso centro O ed angoli orientati α e β, è una rotazione attorno allo stesso centro ed angolo α+β.***
- ***La composta di due simmetrie centrali con centri O' e O'' è una traslazione di vettore $\vec{v}$ =2 $\overrightarrow{O'O''}$.***
- ***La composta di una simmetria centrale di centro O e di una traslazione di vettore $\vec{v}$ è una simmetria centrale di centro O' tale che $\overrightarrow{OO'}$ = $\frac{1}{2}$ $\vec{v}$.***

- ***La composta di due simmetrie assiali con assi a e b paralleli è una traslazione di vettore perpendicolare agli assi,con modulo il doppio della distanza fra essi, di verso che va dall'asse della prima simmetria all'asse della seconda.***
- ***La composta di due simmetrie assiali con assi a e b che si intersecano in un punto V e formanti un angolo α è una rotazione con centro V ed angolo β=2α.***
- ***La composta di tre simmetrie assiali con assi paralleli oppure passanti per uno stesso punto è una simmetria assiale.***

§5.1 Composta di due simmetrie centrali.

Siano $\mathbf{S_M}$ e $\mathbf{S_N}$ due simmetrie centrali di centro rispettivamente $M(x_M;y_M)$ e $N(x_N\ ;y_N\ )$; sia $P(x;y)$ un punto del piano cartesiano. Vogliamo determinare il punto corrispondente di P nei due modi possibili:

- Attraverso la composta $\mathbf{S}_M o \mathbf{S}_N$, cioè $\mathbf{S}_M o \mathbf{S}_N$ (P) = P_1

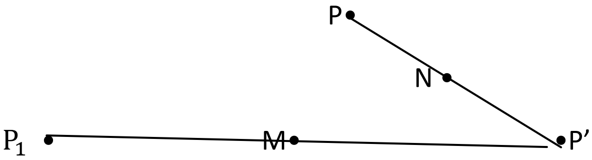


Fig.5.1.1

- Attraverso la composta $\mathbf{S}_N o \mathbf{S}_M$, cioè $\mathbf{S}_N o \mathbf{S}_M$ (P) = P_2

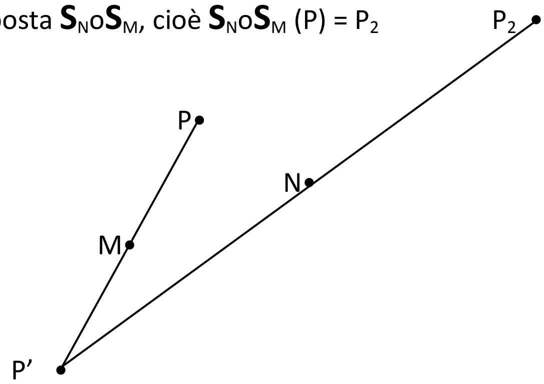


Fig. 5.1.2

<u>Osservazione importante</u>: assemblando le due figure precedenti si ottiene la fig. 5.1.3 nella quale P_1 e P_2 risultano simmetrici rispetto al punto di partenza P. Per cui basta trovare uno dei due punti corrispondenti di P (per esempio P_1) per trovare l'altro (cioè P_2).

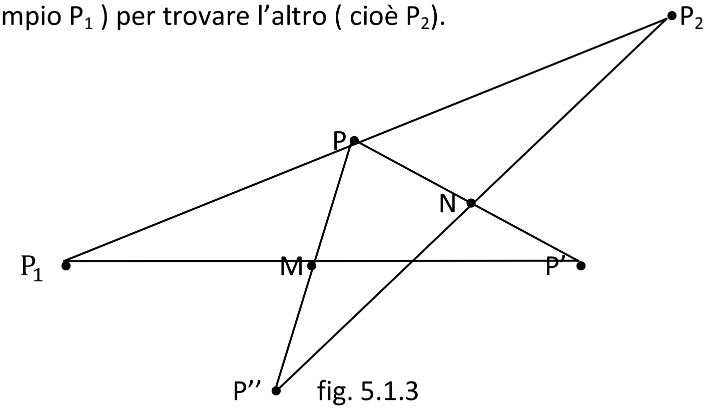


fig. 5.1.3

Esempio.

Siano $\mathbf{S}_M$, di centro M(1;3), e $\mathbf{S}_N$, di centro N(2;-1), due simmetrie centrali; sia P(3;5) un punto del piano cartesiano.

Calcoliamo $\mathbf{S}_M o \mathbf{S}_N$ (P) = P_1 , applicando le equazioni della simmetria centrale e utilizzando il seguente facile schema:

$$P(3;5) \xrightarrow{\mathbf{S}_N} (1;-7) \xrightarrow{\mathbf{S}_M} P_1(1;13)$$

Calcoliamo, ora, $\mathbf{S}_N o \mathbf{S}_M$ (P) = P_2 allo stesso modo:

$$P(3;5) \xrightarrow{\mathbf{S}_M} (-1;1) \xrightarrow{\mathbf{S}_N} P_2(5;-3)$$

Notiamo che P_1 e P_2 sono simmetrici rispetto a P.

Infatti: $\frac{1+5}{2} = 3 = x_P$; $\frac{13+(-3)}{2} = 5 = y_P$

Pertanto, è sufficiente calcolare uno dei due, per esempio P_2, per ottenere P_1.

§5.2 Composta di una simmetria centrale e di una simmetria assiale.

Indichiamo con

$\mathbf{S}_M$ la simmetria centrale di centro $M(x_M ;y_M)$;

$\mathbf{S}_x$ la simmetria assiale rispetto all'asse delle x;

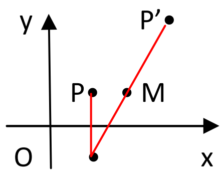
$\mathbf{S}_y$ la simmetria assiale rispetto all'asse delle y;

$P(x_1 ; y_1)$ un punto del piano.

Si hanno i seguenti casi:

1. $\mathbf{S}_x o \mathbf{S}_M$ (P) = P'(x';y'). Applichiamo il solito schema:

$$P(x_1 ; y_1) \xrightarrow{\mathbf{S}_M} (2x_M-x_1; 2y_M-y_1) \xrightarrow{\mathbf{S}_x} P'(x' = 2x_M-x_1 ; y' = y_1-2y_M)$$

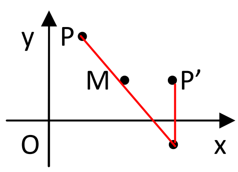


Dunque $\mathbf{S}_x o \mathbf{S}_M$: $\begin{cases} x' = 2x_M - x_1 \\ y' = y_1 - 2y_M \end{cases}$ (5.2.1)

fig.5.2.1

2. $\mathbf{S}_M o \mathbf{S}_x$ (P) = P'. Applichiamo lo schema:

$$P(x_1 ; y_1) \xrightarrow{\mathbf{S}_x} (x_1;-y_1) \xrightarrow{\mathbf{S}_M} P'(x' = 2x_M-x_1 ; y' = 2y_M+y_1)$$

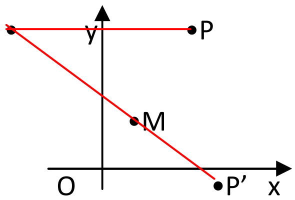


Dunque $\mathbf{S}_M o \mathbf{S}_x$: $\begin{cases} x' = 2x_M - x_1 \\ y' = 2y_M + y_1 \end{cases}$ (5.2.2)

fig.5.2.2

3. $\mathbf{S_M o S_y}$ (P) = P'. Applichiamo lo schema:

$P(x_1 ; y_1) \xrightarrow{\ \mathbf{S_y}\ } (-x_1;y_1) \xrightarrow{\ \mathbf{S_M}\ } P'(x' = 2x_M+x_1 ; y' = 2y_M-y_1)$

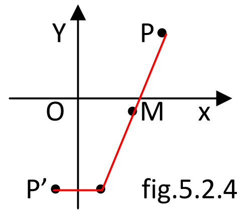


Dunque $\mathbf{S_M o S_y}$: $\begin{cases} x' = 2x_M + x_1 \\ y' = 2y_M - y_1 \end{cases}$ (5.2.3)

fig.5.2.3

4. $\mathbf{S_y o S_M}$ (P) = P'. Applichiamo lo schema:

$P(x_1 ; y_1) \xrightarrow{\ \mathbf{S_M}\ } (2x_M-x_1; 2y_M-y_1) \xrightarrow{\ \mathbf{S_y}\ } P'(x' = x_1-2x_M ; y' = 2y_M-y_1)$



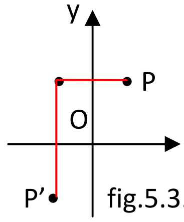
Dunque $\mathbf{S_y o S_M}$: $\begin{cases} x' = x_1 - 2x_M \\ y' = 2y_M - y_1 \end{cases}$ (5.2.4)

fig.5.2.4

§5.3 Composta delle due simmetrie assiali (rispetto agli assi).

Calcoliamo $\mathbf{S_x o S_y}$ (P) = P'(x';y'). Applichiamo lo schema che conosciamo:

$P(x_1 ; y_1) \xrightarrow{\ \mathbf{S_y}\ } (-x_1;y_1) \xrightarrow{\ \mathbf{S_x}\ } P'(x' =-x_1 ; y' =-y_1)$

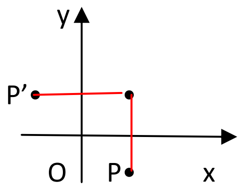


Dunque $\mathbf{S_x o S_y}$: $\begin{cases} x' = -x_1 \\ y' = -y_1 \end{cases}$ (5.3.1)

fig.5.3.1

Calcoliamo $\mathbf{S_y o S_x}$ (P) = P'(x';y').

$P(x_1 ; y_1) \xrightarrow{\ \mathbf{S_x}\ } (x_1;-y_1) \xrightarrow{\ \mathbf{S_y}\ } P'(x' =-x_1 ; y' =-y_1)$

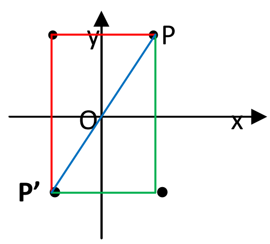


Dunque $\mathbf{S_y o S_x}$: $\begin{cases} x' = -x_1 \\ y' = -y_1 \end{cases}$ (5.3.2)

Fig.5.3.2

<u>**Osservazione:**</u> Ricordiamo che la simmetria centrale $\mathbf{S_O}$ di centro l'origine degli assi O(0;0) ha equazioni:

$\mathbf{S_O}$: $\begin{cases} x' = -x_1 \\ y' = -y_1 \end{cases}$



E queste sono le stesse equazioni di $\mathbf{S_y o S_x}$ e di $\mathbf{S_x o S_y}$. Pertanto si ha che

$$\mathbf{S_y o S_x} = \mathbf{S_x o S_y} = \mathbf{S_O}.$$

Fig.5.3.3

§5.4 Composta di una simmetria centrale e di una traslazione.

Siano $\mathbf{S_M}$ la simmetria centrale di centro $M(x_M\,;\,y_M)$, $T_{\vec{v}}$ la traslazione di vettore $\vec{v}(m;n)$ e $P(x_1\,;\,y_1)$ un punto del piano.

1. Calcoliamo $\mathbf{S_M} \mathbf{o} T_{\vec{v}}\,(P) = P'\,(x';\,y')$, applicando lo schema che conosciamo.

$$P(x_1\,;\,y_1) \xrightarrow{T_{\vec{v}}} (x_1+m\,;\,y_1+n) \xrightarrow{\mathbf{S_M}} P'(x' = 2x_M - (x_1+m)\,;\,y' = 2y_M - (y_1+n)$$

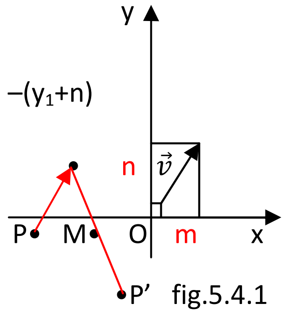


fig.5.4.1

Dunque $$\mathbf{S_M} \mathbf{o} T_{\vec{v}} : \begin{cases} x' = 2x_M - (x_1 + m) \\ y' = 2y_M - (y_1 + n) \end{cases} \qquad (5.4.1)$$

2. Calcoliamo $T_{\vec{v}}$ o $\mathbf{S_M}$ (P) = P' (x'; y'), applicando lo schema

$$P(x_1\,;\,y_1) \xrightarrow{\mathbf{S_M}} (2x_M - x_1\,;\,2y_M - y_1) \xrightarrow{T_{\vec{v}}} P'(x' = 2x_M - x_1 + m\,;\,y' = 2y_M - y_1 + n)$$

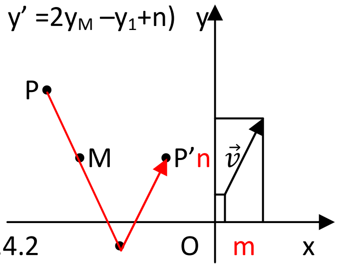


fig.5.4.2

Dunque $$T_{\vec{v}} \mathrm{o} \mathbf{S_M} : \begin{cases} x' = 2x_M - x_1 + m \\ y' = 2y_M - y_1 + n \end{cases} \qquad (5.4.2)$$

§5.5 Composta di una simmetria assiale e di una traslazione.

Sia $\mathbf{S_x}$ la simmetria assiale rispetto all'asse delle x, $T_{\vec{v}}$ la traslazione di vettore $\vec{v}(m;n)$ e $P(x_1\,;\,y_1)$ un punto del piano.

1. Calcoliamo $\mathbf{S_x} \mathbf{o} T_{\vec{v}}\,(P) = P'\,(x';\,y')$, applicando lo schema che conosciamo.

$$P(x_1\,;\,y_1) \xrightarrow{T_{\vec{v}}} (x_1+m\,;\,y_1+n) \xrightarrow{\mathbf{S_x}} P'(x' = x_1 + m\,;\,y' = -y_1 - n)$$

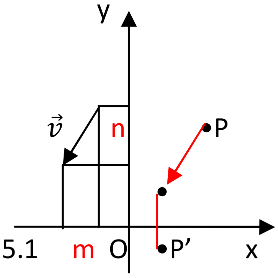


Fig.5.5.1

Dunque $$\mathbf{S_x} \mathbf{o} T_{\vec{v}} : \begin{cases} x' = x_1 + m \\ y' = -y_1 - n \end{cases} \qquad (5.5.1)$$

2. Calcoliamo $T_{\vec{v}}$ o $\mathbf{S_x}$ (P) = P' (x'; y'), applicando lo schema

$$P(x_1\,;\,y_1) \xrightarrow{\mathbf{S_x}} (x_1\,;\,-y_1) \xrightarrow{T_{\vec{v}}} P'(x' = x_1+m\,;\,y' = -y_1+n)$$

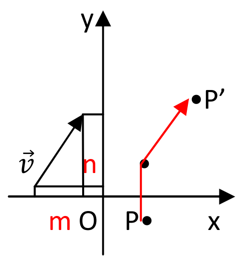


fig.5.5.2

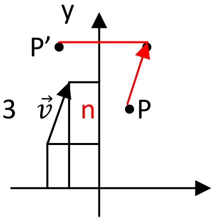
Dunque $$T_{\vec{v}} \mathrm{o} \mathbf{S_x} : \begin{cases} x' = x_1 + m \\ y' = -y_1 + n \end{cases} \qquad (5.5.2)$$

3. Calcoliamo $\mathbf{S_y} \mathbf{o} T_{\vec{v}}\,(P) = P'\,(x';\,y')$, applicando lo schema

$$P(x_1\,;\,y_1) \xrightarrow{T_{\vec{v}}} (x_1+m\,;\,y_1+n) \xrightarrow{\mathbf{S_y}} P'(x' = -x_1 - m\,;\,y' = y_1 + n)$$

Dunque $$\mathbf{S_x} \mathbf{o} T_{\vec{v}} : \begin{cases} x' = -x_1 - m \\ y' = y_1 + n \end{cases} \qquad (5.5.3)$$

fig.5.5.3



4. Calcoliamo $T_{\vec{v}}$ o $\mathbf{S}_y$ (P) = P′ (x′; y′), applicando lo schema

$$P(x_1\,;\,y_1) \xrightarrow{\ \mathbf{S}_y\ } (-x_1\,;\,y_1) \xrightarrow{\ T_{\vec{v}}\ } P'(x' = -x_1+m\,;\,y' = y_1+n)$$

Dunque $\qquad T_{\vec{v}}\ \mathrm{o}\mathbf{S}_y\!: \boxed{\begin{cases} x' = -x_1 + m \\ y' = y_1 + n \end{cases}} \qquad (5.5.4)$

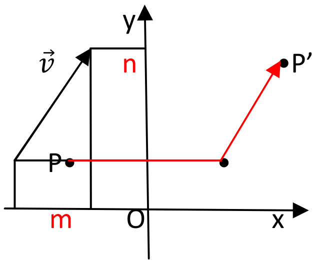


Fig.5.5.4

§5.6 Glissosimmetria (o antitraslazione).

La ***glissosimmetria*** è la composta tra una traslazione $T_{\vec{v}}$ di vettore $\vec{v}$ (m;n) e una simmetria assiale $\mathbf{S}_r$ con asse r avente la stessa direzione del vettore $\vec{v}$. Viene detta anche ***antitraslazione.***

fig.5.6.1

$\mathbf{S}_r\,\mathbf{o}\,T_{\vec{v}}$ (P) = P′

oppure

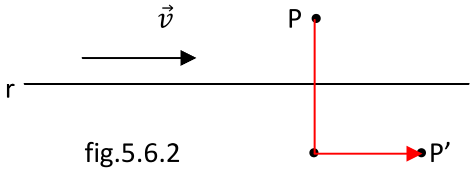


fig.5.6.2

$T_{\vec{v}}$ o $\mathbf{S}_r$ (P) = P′

Dalle due figure si ricava che:

$$\mathbf{S}_r\,\mathbf{o}\,T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}}\ \mathrm{o}\ \mathbf{S}_r$$

Infatti, indicato con il colore blu il percorso di P applicando $\mathbf{S}_r\,\mathbf{o}\,T_{\vec{v}}$ e con il colore rosso il percorso di P applicando $T_{\vec{v}}$ o $\mathbf{S}_r$**,** il punto finale che corrisponde a P operando con ciascuna di esse è lo stesso P′.

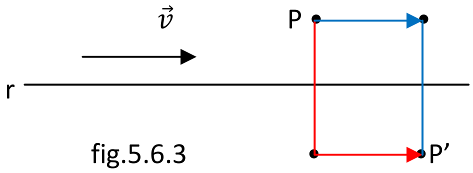


fig.5.6.3

$\mathbf{S}_r\,\mathbf{o}\,T_{\vec{v}}$ (P) = $T_{\vec{v}}$ o $\mathbf{S}_r$ (P) = P′

APPROFONDIMENTO

§6. Simmetria assiale con asse una generica retta del piano cartesiano.

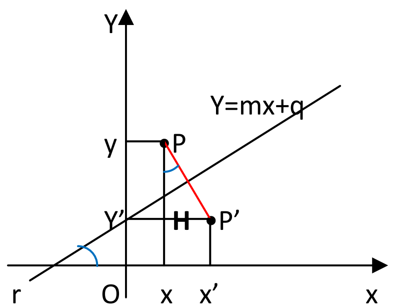


fig.6.1

Sia $\mathbf{S}_r$ la simmetria assiale di asse r di equazione y=mx+q, sia P(x ; y) un punto del piano e P' (x' ; y') il suo corrispondente nella $\mathbf{S}_r$ **.** Indichiamo con M il punto medio di PP' per cui

$$M(X_M = \frac{x+x'}{2} \; ; \; y_M = \frac{y+y'}{2}).$$

Il punto M appartiene ad r, quindi applichiamo la condizione di appartenenza di M ad r:

$$\frac{y+y'}{2} = \frac{x+x'}{2} m + q \qquad (1);$$

Inoltre, l'angolo α che la retta r forma con l'asse delle x è congruente all'angolo $H\widehat{P}P'$ (si osservi che HP'⊥HP e PP'⊥r)[(1)]. Di conseguenza si ha

$$tang(\alpha) = m = \frac{x'-x}{y-y'} \qquad (2).$$

Mettiamo a sistema la (1) e la (2)

$$\begin{cases} \dfrac{y+y'}{2} = \dfrac{x+x'}{2} m + q \\ m = \dfrac{x'-x}{y-y'} \end{cases}$$

Risolviamo rispetto a x' e y' :

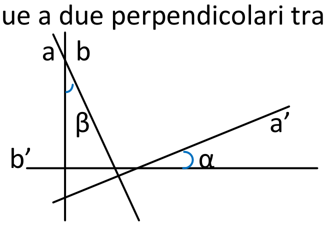
$\begin{cases} y' + y - mx' - mx - 2q = 0 \\ x' - x + my' - my = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} mx' - y' = y - mx - 2q \\ x' + my' = x + my \end{cases}$ da cui, risolvendo il sistema, si ottengono le equazioni della simmetria assiale $\mathbf{S}_r$

$$\mathbf{S}_r : \begin{cases} x' = \dfrac{x(1-m^2)+2my-2mq}{1+m^2} \\ y' = \dfrac{y(m^2-1)+2mx+2q}{1+m^2} \end{cases} \qquad (6.1)$$

---

(1) Angoli formati da rette a due a due perpendicolari tra loro sono congruenti (vedi fig.6.2).

fig.6.2



a⊥ a' e b⊥ b'
α=β

§7. Equazioni della rotazione.

Qui si propone un procedimento per ricavare le equazioni della rotazione.
Sia $\mathbf{R}_{(O,\alpha)}$ la rotazione di centro O, angolo di rotazione α e verso di rotazione antiorario ↶.

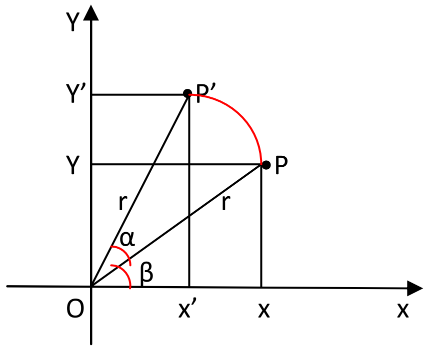


Fig.7.1

Dalla figura si ricavano le seguenti

X = r cos(β);
y =r sen (β);
x' =r cos(α+β) = r cos(α)cos(β)-r sen(α)sen(β) = xcos(α)-y sen(α);
y' =r sen(α+β) = r sen(α)cos(β)+r sen(β)cos(α)=x sen(α)+y cos(α).
Dunque le relazioni

$$\mathbf{R}_{(O,\alpha)}: \begin{cases} x' = x\cos(\alpha) - y\,\mathrm{sen}(\alpha) \\ y' = x\,\mathrm{sen}(\alpha) + y\cos(\alpha) \end{cases} \qquad (7.1)$$

esprimono le equazioni della rotazione di centro O e di ampiezza α con verso di rotazione antiorario ↶.
Se il centro di rotazione è un punto qualsiasi Q(a;b) allora alle (9.1) bisogna applicare le equazioni della traslazione degli assi:

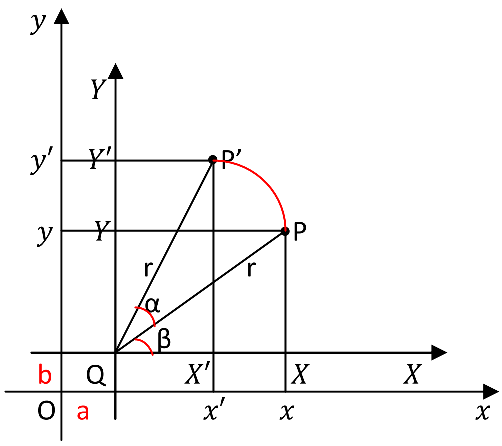


fig.7.2

Si ha per P: $\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$ e per P': $\begin{cases} X' = x' - a \\ Y' = y' - b \end{cases}$

Per cui le (7.1) diventano, con ovvio significato dei simboli usati:

$$\begin{cases} x' - a = (x-a)\cos(\alpha) - (y-b)\,\mathrm{sen}(\alpha) \\ y' - b = (x-a)\mathrm{sen}(\alpha) + (y-b)\cos(\alpha) \end{cases}$$

E quindi $\mathbf{R}_{(Q,\alpha)}$: $\begin{cases} x' = (x-a)\cos(\alpha) - (y-b)\mathrm{sen}(\alpha) + a \\ y' = (x-a)\mathrm{sen}(\alpha) + (y-b)\cos(\alpha) + b \end{cases}$ (7.2)

Queste sono le equazioni di una rotazione di centro un punto generico Q(a;b), di ampiezza α e verso di rotazione antiorario ↶.

Osservazione.
Per convenzione gli angoli ruotati in senso antiorario ↶ sono considerati positivi, mentre quelli ruotati in senso orario ↷ sono considerati negativi .
Pertanto, per le rotazioni di angoli negativi si fa ricorso alle identità:

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha), \quad \mathrm{sen}(-\alpha) = -\mathrm{sen}(\alpha)$$

§8. Equazioni della rotazione degli assi.

Sia $\mathbf{R}_{(Q,\alpha)}$ la rotazione di centro Q e ampiezza α con verso antiorario ↶ .

Sia P un punto del piano cartesiano di coordinate $(x;y)$ rispetto al sistema di riferimento xOy e di coordinate $(X;Y)$ rispetto al sistema di riferimento XOY . Osserviamo che:

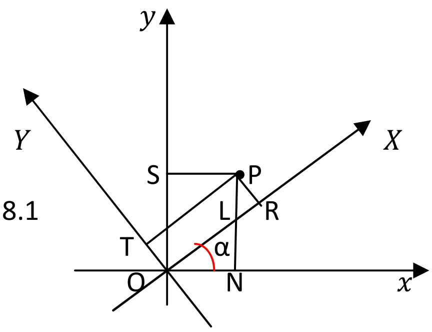


Fig.8.1

$$y = PN = PL+LN = \frac{PR}{\cos(\alpha)} + ON \bullet \mathrm{tang}(\alpha) = \frac{Y}{\cos(\alpha)} + x \bullet \frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

da cui $Y = y\cos(\alpha) - x\,\mathrm{sen}(\alpha)$ (1)

Analogamente:

$x = ON = OL \bullet \cos(\alpha) = (OR - LR)\cos(\alpha) = OR \bullet \cos(\alpha) - LR \bullet \cos(\alpha) =$

$= X\cos(\alpha) - Y\mathrm{sen}(\alpha)$,

essendo $LR \bullet \cos(\alpha) = PR \bullet \mathrm{tang}(\alpha) \bullet \cos(\alpha) = PR \bullet \frac{\mathrm{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} \bullet \cos(\alpha) = PR \bullet \mathrm{sen}(\alpha) = Y\mathrm{sen}(\alpha)$.

Sostituendo la (1) in quest'ultima relazione si ha:

$x = X\cos(\alpha) - \mathrm{sen}(\alpha)(y\cos(\alpha) - x\,\mathrm{sen}(\alpha)) = X\cos(\alpha) - y\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha) + x\,\mathrm{sen}^2(\alpha)$ da cui

$X\cos(\alpha) = x - x\,\mathrm{sen}^2(\alpha) + y\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$ e quindi

$X\cos(\alpha) = x(1 - \mathrm{sen}^2(\alpha)) + y\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha) = x\cos^2(\alpha) + y\mathrm{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$ e semplificando per cos(α) si ha:

$$X = x\cos(\alpha) + y\mathrm{sen}(\alpha) \qquad (2)$$

Raccogliendo la (1) e la (2) si ottengono le equazioni della rotazione.

$$\mathbf{R}: \begin{cases} X = x\cos(\alpha) + y\mathrm{sen}(\alpha) \\ Y = y\cos(\alpha) - x\,\mathrm{sen}(\alpha) \end{cases} \qquad (8.1)$$

§9. **Equazione della rototraslazione degli assi (composta di traslazione con una rotazione).**

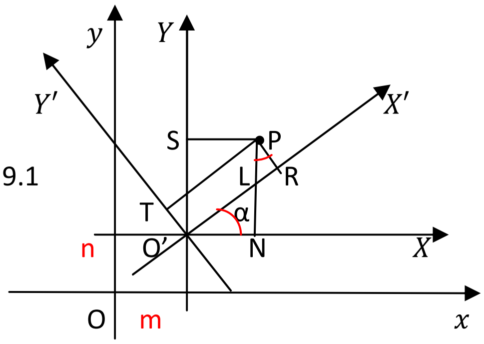


Fig.9.1

Si hanno tre sistemi di riferimento xOy, $XO'Y$, $X'O'Y'$.

Considerato un punto P, questo ha coordinate:

P(x;y) in xOy,

P(X;Y) in $XO'Y$,

P(X';Y') in $X'O'Y'$.

Mentre O'(m;n) rispetto al sistema xOy.

Per la traslazione degli assi da xOy a $XO'Y$ si ha: $\begin{cases} X = x - m \\ Y = y - n \end{cases}$;

Per la rotazione degli assi da $XO'Y$ a $X'O'Y'$ si ha: $\begin{cases} X' = X\cos(\alpha) + Y\mathrm{sen}(\alpha) \\ Y' = Y\cos(\alpha) - X\,\mathrm{sen}(\alpha) \end{cases}$;

Per la **rototraslazione** degli assi da xOy a $X'O'Y'$ si ha:

$$\begin{cases} X' = (x-m)\cos(\alpha) + (y-n)\mathrm{sen}(\alpha) \\ Y' = (y-n)\cos(\alpha) - (x-m)\,\mathrm{sen}(\alpha) \end{cases} \qquad (9.1)$$

§10. In questo paragrafo si vogliono riproporre le equazioni della **simmetria assiale** di asse una retta generica viste da un'altra angolazione.
Alla luce di quanto detto a proposito della rototraslazione e delle relative equazioni, è possibile ricavare le equazioni della simmetria in modo diverso.

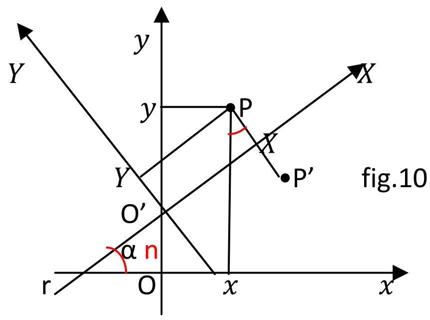


fig.10.1

L'asse di simmetria assume il ruolo di asse delle ascisse X rototraslato. L'origine del sistema rototraslato può essere l'intersezione della retta con l'asse delle y, oppure l'intersezione della retta con l'asse delle x.Per fissare le idee consideriamo come origine del sistema rototraslato il punto O' intersezione di r con l'asse delle y. Disegniamo l'asse Y perpendicolare all'asse X.
Osservato che O' ha coordinate (0;n) rispetto a xOy, nel sistema di riferimento $XO'Y$ rototraslato di xOy le coordinate di P sono date dalle relazioni che già conosciamo

$$\begin{cases} X = x\cos(\alpha) + (y-n)\mathrm{sen}(\alpha) \\ Y = (y-n)\cos(\alpha) - x\,\mathrm{sen}(\alpha) \end{cases} \qquad \text{(con m=0)}$$

Quindi il simmetrico di P rispetto a X è P' le cui coordinate sono date dalle note relazioni

$$\begin{cases} X' = \quad X = x\cos(\alpha) + (y-n)\mathrm{sen}(\alpha) \\ Y' = -Y = -(y-n)\cos(\alpha) + x\,\mathrm{sen}(\alpha) \end{cases} \qquad (10.1)$$

che sono equivalenti alle (6.1) di pagina 18. La diversità fra le due formule sta nel fatto che la (6.1) è più comoda nell'applicarsi poiché di essa si conoscono tutti le quantità ivi presenti: le coordinate del punto P, il valore del coefficiente angolare m e di q. Mentre nella (10.1) bisogna calcolarsi sen(α) e cos(α).