Biografia del numero "*e*"

Dico subito che il numero indicato con la lettera *e* è uguale a 2,7182818284.... (con infinite cifre decimali):

e=2,7182818284...

Questo numero, cosi strano, è il prezzemolo di tutte le minestre in matematica. Vediamo più da vicino questo personaggio.
Intanto, è bene sapere che il Montante è il Capitale+Interesse. La formula del montante è

$$M = (C + i)^n$$

Dove *M* è il Montante, *C* il capitale, i l'interesse ed n il numero dei periodi.

Un **esempio** di come si trova il valore di 2,71828184..
Voglio investire 1 euro.
La banca Buoninteresse mi propone un interesse del 100%.
Alla fine dell'anno mi trovo

1+100% di 1=2 euro (il doppio del mio capitale di 1 euro).

Non contento, mi rivolgo ad una seconda banca, la Buoninvestimento, che mi offre il 100% di interesse all'anno, però da calcolarsi ogni 6 mesi. Ora, ogni anno ci sono 2 periodi di 6 mesi, per cui devo dividere il 100% per due. Il calcolo da fare è il seguente:

$$1 + \frac{100\%}{2}\ di\ 1 = 1 + 50\%\ di\ 1 = 1 + 0{,}50 = 1{,}50\ euro$$

Nel secondo semestre il nuovo capitale di 1,50 euro mi rende

$$1{,}50 + \frac{100\%}{2}\ di\ 1{,}50 = 1{,}50 + 50\%\ di\ 1{,}50 = 1{,}50 + 0{,}75 = 2{,}25\ euro$$

Quindi l'investimento è più redditizio.
Il risultato di 2,25 si ottiene, più semplicemente, ricorrendo alla relazione

$$(1 + i)^2 = (1 + \frac{1}{2})^2 = (1{,}5)^2 = 2{,}25$$

Dove i è l'interesse semestrale pari a $\frac{1}{2}$ che si ottiene da $\frac{100\%}{2} = \frac{\frac{100}{100}}{2} = \frac{1}{2}$

Mi rivolgo ad una terza banca, la Ottimoinvestimento, che mi fa un interesse, sempre del 100% all'anno, ma su base quadrimestrale. Di quadrimestri in un anno ce ne sono 3, per cui l'interesse del 100% va diviso per tre. Il calcolo da fare è il seguente:
Nel primo quadrimestre

$$1 + \frac{100\%}{3}\ di\ 1 = 1 + 33\%\ di\ 1 = 1 + 0{,}33 = 1{,}33\ euro$$

Nel secondo quadrimestre il capitale di 1,33 euro produce il montante:

$$1{,}33 + \frac{100\%}{3}\ di\ 1{,}33 = 1{,}33 + 33\%\ di\ 1{,}33 = 1{,}33 + 0{,}34 = 1{,}77\ euro$$

Nel terzo quadrimestre (e quindi alla fine del primo anno) si ha il montante finale:

$$1{,}77 + \frac{100\%}{3}\ di\ 1{,}77 = 1{,}77 + 33\%\ di\ 1{,}77 = 1{,}77 + 0{,}60 = 2{,}37\ euro$$

che risulta ancora più redditizio rispetto a quello della seconda banca.
Anche qui ricorro alla relazione

$$(1 + \frac{1}{3})^3 = (1{,}3333)^3 = 2{,}37$$

E se l'interesse viene calcolato ogni mese? Provo a calcolare il montante che potrei ottenere con un interesse calcolato ogni mese:

$$1°\ mese : 1 + \frac{100\%}{12}\ di\ 1 = 1 + 8\%\ di\ 1 = 1 + 0{,}08 = 1{,}08\ euro$$

$$2°\ mese : 1{,}08 + \frac{100\%}{12}\ di\ 1{,}08 = 1{,}08 + 8\%\ di\ 1{,}08 = 1{,}08 + 0{,}09 = 1{,}17\ euro$$

3° mese : ....

4° mese : ....

....

$$12°\ mese: M = (1 + \frac{1}{12})^{12} = 2{,}613$$

E 2,613 è ancora più redditizio di tutti i risultati precedenti.

Se poi calcolo il montante con un interesse giornaliero, allora ho:

$$dopo\ un\ anno, con\ interesse\ giornaliero: M = (1 + \frac{1}{365})^{365} = 2{,}7145\ \ldots$$

Uno si aspetterebbe un interesse su interesse, cosi da lievitare il proprio capitale in maniera esponenziale.
In realtà, per quanto calcoliamo l'interesse più il capitale (il Montante), c'è un limite oltre il quale il Montante rimane, diciamo cosi, costante. In altre parole, non cresce.
Beh, questo limite è 2,7182818284.... Questo valore viene indicato con la lettera *e*

e=2,7182818284...

e viene chiamato numero di Nepero, dal matematico scozzese John Napier, latinizzato Giovanni Nepero (1550-1617). In altre parole, volendo portare all'esasperazione il numero dei periodi di interesse, diciamo un numero infinito di periodi, il limite massimo che si può ottenere è il valore di *e*. Possiamo scrivere in termini matematici:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

Formula di Stirling

Alla formula $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ si perviene anche applicando un'altra formula, quella di James Stirling, altro matematico scozzese detto "il Veneziano" (1692-1770).
Nel 1730 Stirling pubblica l'opera "Methodus Differentialis"; in questo libro enuncia la formula di approssimazione per n! (fattoriale di n)

$$\boxed{\ln n! = n\ln n - n}$$

per n che tende all'infinito.
Infatti, poiché

$$n! = \frac{(n+1)!}{(n+1)}$$

passo ai logaritmi di entrambi i membri

$$\ln n! = \ln\frac{(n+1)!}{(n+1)} = \ln(n+1)! - ln\,(n+1)$$

Ora, applico l'approssimazione di Stirling alla quantità

$$\ln(n+1)! = (n+1)\ln(n+1) - (n+1)$$

per cui posso scrivere

$$\boldsymbol{n\ln n - n} = \ln n! = \ln(n+1)! - ln\,(n+1) = (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - \ln(n+1)$$
$$= \mathbf{\ln(\boldsymbol{n}+1)\,(\boldsymbol{n}+1-1) - \boldsymbol{n} - 1}$$

E quindi

$$\boldsymbol{n\ln n} - \cancel{n} = \ln(n+1)\,(n+\cancel{1}-\cancel{1}) - \cancel{n} - 1 = \boldsymbol{n}\,\mathbf{\ln(\boldsymbol{n}+1)} - \mathbf{1}$$

da cui

$$\mathbf{1} = n\ln(n+1) - n\ln n = \ln(n+1)^n - \ln n^n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \mathbf{ln}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}\right)^{\boldsymbol{n}}$$

In definitiva, poiché 1=ln e,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 = \ln e$$

Da quest'ultima uguaglianza si ha

$$e = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

che, per n molto grande cioè tendente all'infinito (per Stirling), si scrive

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Osservazione

La formula di Stirling viene scritta spesso nel modo seguente

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

che è più comoda per calcolare il fattoriale di n, con un errore dello 0,3%, sempre per n sufficientemente grande.

Formula di Eulero
(Leonhard Euler, Basilea 1707-Pietroburgo 1783, italianizzato Eulero, matematico svizzero)

Il prolifico Eulero dimostrò la seguente bellissima relazione

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Perché bellissima? Perché riunisce in un'unica formula il numero di Nepero $\boldsymbol{e}$, l'unità immaginaria $\boldsymbol{i}$, il numero $\boldsymbol{\pi}$, l'elemento neutro **1** per la moltiplicazione e l'elemento neutro **0** per l'addizione.

Per dimostrare questa, si sfrutta l'altra notevole relazione

$$\boxed{e^{ix} = cosx + isenx}$$

che Eulero aveva dimostrato nel 1746.
Per quest'ultima non riporto la dimostrazione di Eulero ma quella proposta da Mahdi Barhoumi e pubblicata sul sito www.simor.org/user/36501/mahdibarhoumi. E' più semplice ed elegante.
Pongo

$$z = cosx + isenx$$

E, tenendo conto che $i^2 = -1$, ne faccio la derivata rispetto alla x

$$\boldsymbol{\frac{dz}{dx}} = -senx + icosx = (-1)senx + icosx = i^2senx + icosx = i(cosx + isenx) = \boldsymbol{iz}$$

Da

$$\frac{dz}{dx} = iz$$

ricavo

$$\frac{dz}{z} = idx$$

Passo all'integrale di entrambi i membri

$$\int \frac{dz}{z} = \int idx$$

Da cui

$$ln\, z = ix + 0$$

E quindi, per definizione di logaritmo,

$$\boldsymbol{e^{ix}} = z = \boldsymbol{cosx + isenx}.$$

Se in questa relazione pongo $x = \pi$, si ha

$$e^{i\pi} = cos\pi + isen\pi = -1 + 0$$

E quindi, in definitiva

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

<u>FORMULE DI EULERO</u>

Abbiamo visto che

$$(1)\quad e^{ix} = cosx + isenx$$

Ma anche, mettendo – x al posto di x

$$(2)\quad e^{-ix} = \cos(-x) - isenx = cosx - isenx$$

Addizionando e sottraendo le due precedenti formule si ottengono le seguenti altre

$$(3)\quad cosx = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$(4)\quad senx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Le (1), (2), (3) e (4) si dicono **formule di Eulero**.
Raccolgo

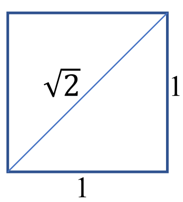
$$(1)\quad e^{ix} = cosx + isenx$$
$$(2)\quad e^{-ix} = cosx - isenx$$
$$(3)\quad cosx = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$
$$(4)\quad senx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

<u>Trascendenza di *e*</u>

Alcune definizioni

- Un numero veniva detto "**costruibile**" dai greci se esso rappresentava una grandezza geometrica ottenuta con sola riga e compasso.
- Un. Numero si dice "**algebrico**" quando è soluzione di un'equazione a coefficienti interi.
  Esempi:
  $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow$ 3 è un numero algebrico;
  $x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ è un numero algebrico;
  $x^3 - 2 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{2} \rightarrow \sqrt[3]{2}$ è un numero algebrico.
  $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt{-1} = i \rightarrow i$ è un numero algebrico

Un numero costruibile è anche algebrico, ma non viceversa. Infatti $\sqrt{2}$ è costruibile perché rappresenta la diagonale di un quadrato di lato 1



Ma è anche algebrico, perché soluzione dell'equazione $x^2 - 2 = 0$ che è a coefficienti interi.
Mentre $\sqrt[3]{2}$ è algebrico perché soluzione dell'equazione $x^3 - 2 = 0$ a coefficienti interi, ma non è costruibile perché non si può ottenere con sola riga e compasso.
A tale proposito ricordo la storia dell'altare di Apollo di Delo. Nell'anno 430 a.C. ad Atene ci fu la pestilenza. Gli ateniesi si rivolsero al Dio perché facesse cessare l'epidemia. Apollo chiese in cambio di duplicare l'altare. Il guaio era che l'altare aveva la forma di un cubo, e, come si sa, non si può duplicare un cubo. Infatti $\sqrt[3]{2}$ è il rapporto tra il lato del solido doppio di un cubo e il lato del cubo stesso. Un cubo di lato *l* ha volume $V=l^3$, il doppio è $2V=2l^3$.
Estraendo la radice cubica:

$$\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{2l^3} = l\sqrt[3]{2} \qquad \text{(lato del solido doppio del cubo)}$$

Rapporto tra questo e il lato del cubo: $\frac{l\sqrt[3]{2}}{l} = \sqrt[3]{2}$

- Un numero che non è algebrico, cioè che non è soluzione di alcuna equazione a coefficienti interi, si dice "**trascendente**".

E il numero *e* è trascendente. Fu Eulero a congetturare che *e* è trascendente. L'esistenza dei numeri trascendenti fu provata per la prima volta nel 1844 da parte del matematico francese Joseph Liouville (24 marzo 1809-8 settembre 1882). Mentre la congettura euleriana fu dimostrata nel 1873 dall'altro matematico francese Charles Hermite (24 dicembre 1822-14 gennaio 1901).

Ulteriori considerazioni sul numero *e*

- Da e trascendente segue che anche e^x trascendente, per ogni x algebrico, con $x \neq 0$.

Ciò fu dimostrato nel 1882 dal matematico tedesco Carl Louis Ferdinand von Lindemann (12 aprile 1852-6 marzo 1939).

- Più sopra si è visto che i è algebrico perché radice dell'equazione $x^2 + 1 = 0$ a coefficienti interi. Riprendo la relazione $e^{i\pi} + 1 = 0$ da cui $e^{i\pi} = -1$. Poiché -1 non è trascendente, anche $e^{i\pi}$ non è trascendente. Cioè esiste un e^x non trascendente. Ma per il teorema di Lindemann $i\pi$ non è algebrico e poiché i è algebrico, è π a non esserlo. In altre parole π è trascendente e ciò implica la non costruibilità di π. Ecco, dunque, dimostrato il bimillenario problema greco: **non è possibile la quadratura del cerchio con solo riga e compasso.**
- Ma se π è trascendente, allora anche e^{π} è trascendente (dimostrato nel 1929 dal matematico russo Alexander Gelfond, 24 ottobre 1906-7 novembre 1968).
- Infine, nel 1966 il matematico inglese Alan Baker (19 agosto 1939-4 febbraio 2018) provò che "un qualunque prodotto finito di numeri trascendenti del tipo trovato da Lindemann e da Gelfond, è ancora trascendente. Nel 1970, per questo risultato, Baker ebbe la medaglia Fields (una sorta di premio Nobel per la matematica).