CALCOLO COMBINATORIO

A) COEFFICIENTI BINOMIALI

Definizione 1: Si dice **fattoriale** di un numero n, e viene indicato col simbolo n!, il prodotto di n per tutti i suoi precedenti.

n! = n(n-1)(n-2)….(n-n+1)

Esempio: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Valgono le seguenti uguaglianze:

1. 0! = 1
2. 1! = 1
3. $\frac{n!}{(n-1)!} = n$
4. $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

Siano n e k due numeri naturali, con $k \leq n$. Si ha la seguente

Definizione 2: Si definisce **coefficiente binomiale**, e si indica con $\binom{n}{k}$,

$$\boldsymbol{\binom{n}{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\boldsymbol{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}}{\boldsymbol{k}!}$$

Il numero dei fattori del numeratore è uguale a k. L'ultima espressione è più facile da ricordare.
La scrittura $\binom{n}{k}$ si legge "n su k", dove n si dice ordine e $k$classe o indice.
Osservo che $\binom{n}{k}$è un numero naturale. Pertanto se $n \leq k$, allora $\binom{n}{k} = 0$.

Esempio: $\binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$.

Controesempio: $\binom{2}{4} = 0$.

Il coefficiente binomiale ci dà il numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono costituire con gli n elementi di un insieme.
Nell'esempio di sopra, il coefficiente binomiale $\binom{7}{4} = 35$ ci dice che con 7 elementi si possono formare 35 gruppi di 4 elementi ciascuno.

Esercizio 1
Quante cartelle bisogna giocare al gioco del lotto per essere certi di vincere un terno?

Risoluzione: $\binom{90}{3} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 117.480$.Quindi con i 90 numeri si possono formare 117.480 terne.

Per il coefficiente binomiale valgono le seguenti proprietà:

1. $\binom{n}{0} = 1$
   Infatti si ha $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$
2. $\binom{n}{1} = n$
   Infatti si ha $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1 \cdot (n-1)!} = n$

3. $\binom{n}{n} = 1$

   Infatti si ha $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!o!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = 1$

4. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Infatti, per definizione di coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-n+k)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

5. Formula di Stifel (Michael Stifel, 1487-1567)

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \binom{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{k}} + \binom{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{k-1}}$$

Dimostrazione:

Intanto $\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-k)!}$

mentre $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!(n-k)}$

Sommando membro a membro si ha

$$\binom{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{k}} + \binom{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{k-1}} = \frac{(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!\,(n-k)} =$$

$$= \frac{(n-k)(n-1)! + k(n-1)!}{k(k-1)!\,(n-k-1)!\,(n-k)} = \frac{(n-1)!\,(n-k+k)}{k(k-1)!\,(n-k-1)!\,(n-k)} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,n}{k(k-1)!\,(n-k-1)!\,(n-k)} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$$

Raccolgo in una tabella

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!} = \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})\cdots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}{\boldsymbol{k}!}$$

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$$

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\mathbf{1}} = \boldsymbol{n}$$

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}} = \mathbf{1}$$

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}}$$

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \binom{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}} + \binom{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}$$

Tabella 1

B) DISPOSIZIONI

Siano n elementi distinti, di natura qualsiasi. Con questi n elementi si vogliono formare tanti gruppi di k elementi ciascuno, secondo una legge di formazione.

Il calcolo combinatorio consente di costruire in un certo modo i gruppi e di stabilire il loro numero totale.

Si hanno le seguenti definizioni.

B.1) DISPOSIZIONE SEMPLICE

Definizione 3: Siano n elementi distinti. Si chiama **disposizione semplice** degli n elementi, presi a k a k (con k $\leq$ n) o di classe k, un gruppo ordinato di k degli elementi dati.

Le disposizioni semplici sono diverse se differiscono per almeno un elemento, oppure per l'ordine con cui i k elementi si presentano. Il simbolo per indicare le disposizioni semplici è

$$\boldsymbol{D_{n,k}}$$

Che si legge:"numero delle disposizioni semplici di n elementi presi a k a k".

Un teorema ci assicura che il numero delle disposizioni semplici di n elementi distinti di classe k è dato da

$$\boldsymbol{D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}$$

Da notare che il secondo membro dell'uguaglianza è costituito di tanti fattori quant'è k (quindi di k fattori).

Possiamo anche dire che per le disposizioni semplici vale la seguente ovvia relazione

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Sia un esempio per chiarire:

Sia n=7 e k=3. Dobbiamo formare disposizioni semplici con i 7 elementi presi a 3 a 3.

$$D_{7,3} = 7(7-1)(7-3+1) = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Il secondo membro dell'uguaglianza è costituito di 3 fattori: 7, (7-1) e (7-3+1).

Osservazione: $\boldsymbol{D_{n,n} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1) = n!}$

Siano ora degli esercizi svolti.

Esercizio 2
In una classe ci sono 22 alunni. In quanti modi si possono disporre su banchi di 3 posti ciascuno?

Risoluzione: $D_{22,3} = 22(22-1)(22-3+1) = 22 \cdot 21 \cdot 20 = 9240$.

Esercizio 3
Quanti sono i numeri di due cifre tutte diverse tra loro?

Risoluzione: le cifre sono 10, da 0 a 9. Presi a due a due, diverse tra loro, si ha

$D_{10,2} = 10(10-1) = 10 \cdot 9 = 90$.

Esercizio 4
Risolvere l'equazione $D_{x,5} = 2D_{x,3}$

Risoluzione: $D_{x,5} = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

e $D_{x,3} = x(x-1)(x-2)$

per cui, sostituendo nell'equazione, si ha $\cancel{x}(x\cancel{-1})(x\cancel{-2})(x-3)(x-4) = 2\cancel{x}(x\cancel{-1})(x\cancel{-2})$ da cui

$(x-3)(x-4) = 2 \rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ oppure } x = 5.$

La prima soluzione $x = 2$ viene scartata in quanto si avrebbe $D_{2,5} = 2D_{2,3}$, equazione impossibile (ricordo che deve essere $k \leq n$) . L'unica soluzione accettabile è $x = 5$.

B.2) DISPOSIZIONE CON RIPETIZIONE

Definizione 4 : Dati n elementi distinti, si dice **disposizione con ripetizione** degli n elementi di classe k (con k $\leq$ n), un gruppo ordinato di k degli n elementi, potendo uno stesso elemento figurare nel gruppo più volte fino a k volte.

Due disposizioni con ripetizione sono diverse quando ci sono due elementi distinti che occupano il medesimo posto nelle disposizioni. Il simbolo che indica le disposizioni con ripetizione è

$$\boldsymbol{D_{n,k}^r} \text{ con } r \leq k$$

dove *r,* iniziale di ripetizione, indica il numero delle volte che può essere ripetuto uno stesso elemento e non incide sul numero delle disposizioni con ripetizione; indica solo che ci possono essere anche le ripetizioni di uno stesso elemento all'interno del gruppo.

Un teorema ci assicura che il numero delle disposizioni con ripetizione di n elementi di classe k è dato da

$$\boldsymbol{D_{n,k}^r = n^k}$$

Esempio: $D_{5,3}^r = 5^3 = 125$
Siano, ora, degli esercizi.

Esercizio 5
Quante sono le colonne tutte diverse che si possono formare al totocalcio?

Risoluzione: i simboli che vengono utilizzati sono tre: x, 1 e 2 in colonna su 13 caselle. Quindi il numero di colonne tutte diverse tra loro è dato da

$$D_{3,13}^r = 3^{13} = 1.594.323$$

Esercizio 6
Quanti sono i numeri a tre cifre, non necessariamente distinte tra loro (quindi con ripetizione)?

Risoluzione: Le cifre sono 10, da 0 a 9. Quindi $D_{10,3}^r = 10^3 = 1000$. Però a questi bisogna sottrarre i numeri con lo 0 avanti (perché 045=45, numero non più a tre cifre ma a due) del tipo 0ab, cioè $D_{10,2}^r = 10^2 = 100$. Perciò:$D_{10,3}^r - D_{10,2}^r = 1000 - 100 = 90$

OSSERVAZIONE: l'ordine ha importanza nelle disposizioni semplici e con ripetizione.

C) PERMUTAZIONI

C.1) PERMUTAZIONE SEMPLICE

Definizione 5: Si dice **permutazione semplice** di n elementi distinti, e si indica con $\boldsymbol{P_n}$, le disposizioni semplici di classe n.
Vale a dire $\boldsymbol{P_n = D_{n,n}}$

Ma $D_{n,n} = n(n-1(n-2)\cdots(n-n+1) = n!$.
Pertanto $$\boldsymbol{P_n = n!}.$$

Esempio: permutazioni di 6 elementi presi tutti insieme, cioè di classe 6: $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Esercizio7
Quanti numeri diversi di quattro cifre si possono formare con le cifre 2,5, 7,8?

Risoluzione: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Esercizio 8
Con le lettere della parola scuola (che sono tutte diverse) quanti anagrammi si possono formare?

Risoluzione: le lettere della parola scuola sono 6 e quindi $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Esercizio 9
In quanti modi si possono disporre 5 persone attorno ad un tavolo?

Risoluzione: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Perché 4! e non 5!?

Spiegazione: quando una persona si siede in un posto qualsiasi, questo rimane fisso; le altre 4 persone possono ruotare a piacere e quindi possono sedersi in 4! modi diversi.

C.2) PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

Se gli n elementi non sono tutti distinti, allora si parla di permutazioni con ripetizione. Si ha la seguente

Definizione 6: Dati n elementi non tutti distinti fra loro, si dice **permutazione con ripetizione** di classe n, e si indica con $\boldsymbol{P_n^\alpha}$, ogni gruppo degli n elementi che differisce dall'altro solo per l'ordine con cui sono disposti gli n elementi.

Nel simbolo $\boldsymbol{P_n^\alpha}$ n è il numero degli elementi ed α il numero degli elementi che si ripetono (tutti uguali tra loro). Se gli elementi uguali sono più di uno, allora il simbolo è $\boldsymbol{P_n^{\alpha,\beta\dots}}$ dove n è il numero degli elementi ed α, β ecc. sono quelli che si ripetono. Il numero delle permutazioni con ripetizione è dato dalla relazione

$$\boldsymbol{P_n^\alpha = \frac{n!}{\alpha!}}$$

Nel caso ci siano più di un elemento che si ripete, allora la relazione diventa

$$\boldsymbol{P_n^{\alpha,\beta\dots} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\cdots}}$$

dove n è il numero degli elementi ed α, β… sono gli elementi che si ripetono.

Con gli esempi seguenti chiarisco quanto sopra detto.

Esempi

- Considero la parola oro; è fatta di tre lettere di cui la o ripetuta due volte. Allora il numero delle permutazioni è dato da

$$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 3$$

Infatti, si hanno le seguenti permutazioni: oro, oor, roo.

- Considero ora la parola mamma; è fatta di cinque lettere di cui la m ripetuta tre volte. Allora il numero delle permutazioni è dato da

$$P_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 10$$

Infatti, si hanno le seguenti permutazioni: mamma, aammm, amamm, ammam,ammma,mamam, maamm, mmama, mmaam, mmmaa. Sono 10 permutazioni.

Esercizio 10
Nell'ingresso di un albergo, su una parete ci sono 5 quadri di cui tre sono di Van Gogh. In quanti modi si possono sistemare i quadri?

Risoluzione: il numero delle permutazioni sono date da $P_5^3 = \frac{5!}{3!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 20.$

Esercizio 11
Su uno scaffale di una libreria ci sono 10 libri, quattro di Pasolini, tre di Vassalli, tre di Manzoni. In quanti modi posso sistemare i dieci libri tenendo conto del solo autore?

Risoluzione: il numero delle permutazioni sono date da

$$P_{10}^{4,3,3} = \frac{10!}{4!\,3!\,3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\,3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 4200$$

OSSERVAZIONE: l'ordine ha importanza nelle permutazioni semplici e con ripetizione.

D) COMBINAZIONI

D.1). COMBINAZIONE SEMPLICE

Definizione 7: Si dice **combinazione semplice** degli n elementi di classe k (con k≤n), e si indica con

$$\boldsymbol{C_{n,k}}$$

un gruppo qualsiasi formato da k degli n elementi.

Due gruppi sono diversi se differiscono tra loro per almeno un elemento.
Per esempio, abc acb, oppure bca e cosi via, rappresentano lo stesso gruppo; anche abcd, acdb, bdca e cosi via, rappresentano lo stesso gruppo perché costituiti dagli stessi elementi. Mentre abc e abd sono gruppi diversi.
Il numero delle combinazioni semplici di n elementi di classe k è dato dalla relazione

$$\boldsymbol{C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{D_{n,k}}{P_k}}$$

Ricordando che $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$, il numero delle combinazioni semplici di classe k viene indicato, più semplicemente, con

$$\boldsymbol{C_{n,k}} = \binom{n}{k}$$

Infatti

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Esercizio 12
Siano a,b,c,d quattro lettere. Quante combinazioni semplici di classe 3 si possono formare?

Risoluzione: $C_{4,3} = \frac{D_{4,3}}{3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4.$
Infatti, abc, abd, bcd, acd sono 4 combinazioni semplici. Non ce ne sono altre.

Nelle combinazioni semplici l'ordine degli elementi in ciascun gruppo non ha importanza; gli elementi in ciascun gruppo devono essere però tutti distinti.

D.2) COMBINAZIONE CON RIPETIZIONE

Definizione 8: Siano n elementi distinti. Si dice **combinazione con ripetizione** degli n elementi di classe k, e si indica con

$$\boldsymbol{C'_{n,k}}$$

con k un qualsiasi intero positivo che può essere minore, uguale o maggiore di n, ogni gruppo di k elementi che si può formare tenendo conto che:

- uno stesso elemento all'interno del gruppo può essere ripetuto fino ad un massimo di k volte;
- due gruppi sono diversi se differiscono tra loro per almeno un elemento, ma **non** per l'ordine.

Le combinazioni con ripetizione si ottengono con la relazione

$$\boldsymbol{C'_{n,k} = C'_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n+k-1-k)!\,k!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!}}$$

Nelle combinazioni con ripetizione l'ordine non ha importanza.
Esercizio 13.
Ho un mazzo di 10 carte di coppe. In quanti modi posso estrarre tre carte, senza tenere conto dell'ordine e rimettendo nel mazzo la carta estratta?

Risoluzione
Ogni volta che estraggo una carta la devo rimettere nel mazzo, per cui nella successiva estrazione può essere estratta la stessa carta. Quindi si tratta di combinazione con ripetizione.

$$C'_{10,3} = \binom{10+3-1}{3} = \binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

Ci sono 220 modi possibili per estrarre tre carte dal mazzo di 10 carte.

Raccolgo in una tabella le relazioni delle disposizioni, permutazioni, combinazioni semplici e con ripetizione.

$\boldsymbol{D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}$	**disposizioni semplici di n elementi di classe k**
$\boldsymbol{D^r_{n,k} = n^k}$	**disposizioni con ripetizione di classe k**
$\boldsymbol{P_n = D_{n,n} = n!}$	**permutazioni semplici di n elementi**
$\boldsymbol{P^\alpha_n = \frac{n!}{\alpha!}}$	**permutazioni con ripetizione di α volte di un elemento**
$\boldsymbol{C_{n,k} = \binom{n}{k}}$	**combinazioni semplici di classe k**
$\boldsymbol{C'_{n,k} = C'_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}}$	**combinazioni con ripetizione di classe k**

Tabella 2

Riepilogando: l'ordine ha importanza per le disposizioni e per le permutazioni; non è importante per le combinazioni.

Uno schema che aiuta ad individuare la via da seguire nel risolvere esercizi di calcolo combinatorio. Lo schema è stato preso dal sito di YouMath.it