Alcune curve celebri, figure e solidi

Lunula

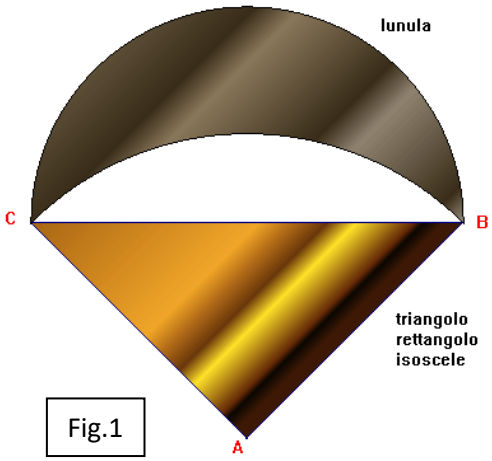


Fig.1

*Si dice **lunula*** (fig.1) *la figura piana limitata da due archi di circonferenza.*

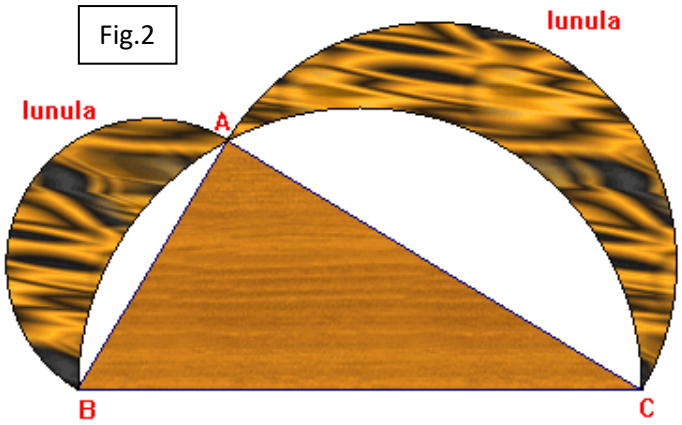
Leonardo da Vinci (1452-1519) dimostrò che esistono lunule equivalenti a figure limitate da segmenti di retta, e la cui area è quindi esprimibile medianti numeri non trascendenti, a differenza dell'intero cerchio la cui area è in funzione di π, noto numero trascendente. Questo ne è un esempio da lui stesso segnalato: preso un triangolo rettangolo isoscele, si traccia la semicirconferenza che ha per diametro l'ipotenusa ed il quarto di cerchio che ha il lato come raggio ed il vertice dell'angolo retto come centro. I due archi delimitano una lunula equivalente al triangolo.

TEOREMA DI ALHAZEN

(matematico arabo, vero nome **Abu Alì al-Hasan ibn al-Haitham**, circa 965-1039)

Se sui due cateti di un triangolo rettangolo si costruiscono due semicirconferenze, la somma delle lunule (vedi fig. 2) comprese fra queste e la semicirconferenza costruita sull'ipotenusa nel semipiano del triangolo, è equivalente al triangolo rettangolo stesso.

Fig.2



Dropenoide

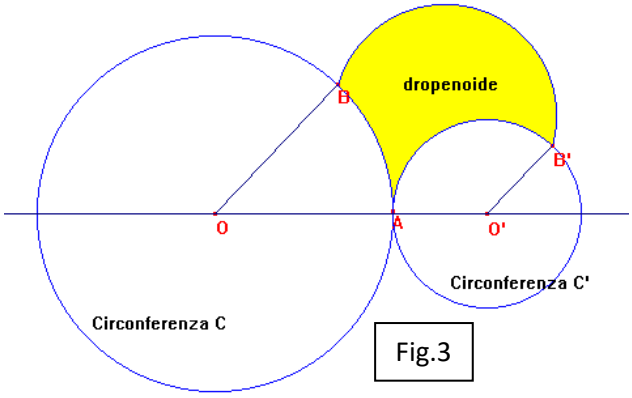


Fig.3

La ***dropenoide*** (fig.3) è un triangolo a lati circolari costruito come si vede in figura: prese due circonferenze tangenti esternamente in A, si considerano due loro raggi tra di loro paralleli OB ed O'B' e si costruisce la semicirconferenza di diametro BB' nel semipiano che non contiene A. Gli archi AB, BB' ed AB' delimitano la dropenoide (in giallo).

Pelecoide

La figura in giallo qui rappresentata è nota come **pelecoide** (fig.4). La si ottiene prendendo due punti C e D sul diametro AB di una circonferenza qualunque e costruendo in uno dei due semicerchi così ottenuti le semicirconferenze di diametri AC e AD, e nell'altro le semicirconferenze di diametri CB e DB. Le quattro semicirconferenze così ottenute delimitano la pelecoide.

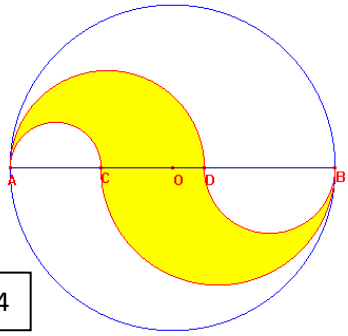


Fig.4

CURVE CELEBRI

Asteroide

L'**asteroide** (fig.5) è una linea piana di equazione cartesiana

$$x^{(2/3)} + y^{(2/3)} = a^{(2/3)}$$

È la prima linea piana che incontriamo in questa carrellata. Il suo grafico è stato ottenuto mediante il software Derive, come la maggior parte delle linee di questi appunti.

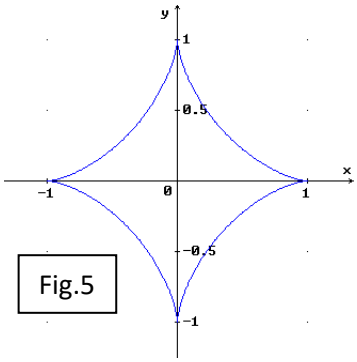


Fig.5

Cardiode

La **cardioide** (fig.6) è una linea piana di equazione cartesiana

$$(x^2 + y^2)^2 - 4\,a\,x\,(x^2 + y^2 - 4\,a^2\,y^2) = 0.$$

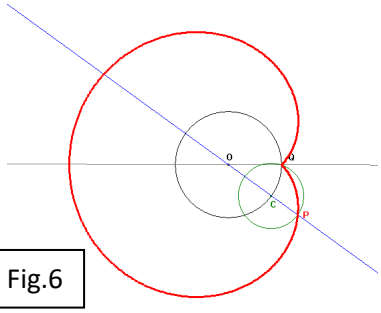


Fig.6

Per costruirla si consideri una circonferenza di centro O, un suo punto Q ed una retta r qualunque uscente dal suo centro. Detta C l'intersezione tra r e la circonferenza, si costruisca l'ulteriore circonferenza che ha centro in C e passa per Q. L'intersezione tra r e questa seconda circonferenza che si trova al di là di C genera la cardioide al ruotare di s attorno al centro O.

Cicloide

La **cicloide** (fig.7) è una linea piana di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R\,(t - t \operatorname{sen} t) \\ y = R\,(1 - \cos t). \end{cases}$$

Questa curva può essere ottenuta come il luogo descritto dal punto di una circonferenza che rotola senza strisciare su di una linea retta. La cicloide è detta anche **brachistocrona** perché, tra tutte le curve che congiungono due punti a quota diversa, è quella lungo la quale un grave scivola dall'uno all'altro nel tempo più breve, come dimostrò Giacomo Bernoulli nel 1696.

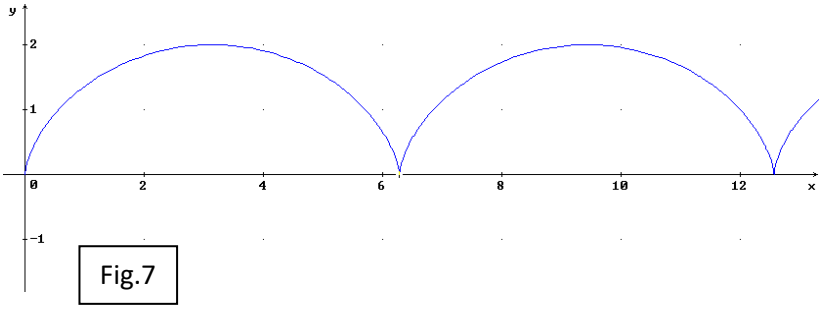


Fig.7

Cissoide

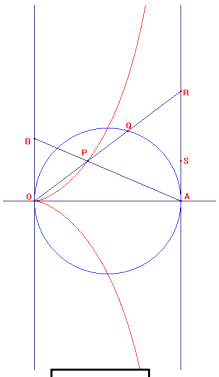


Fig.8

La **cissoide di Diocle** (fig.8) è una linea piana di equazione cartesiana

$$x\,(x^2 + y^2) - a\,y^2 = 0.$$

Per costruirla si consideri una circonferenza, il suo diametro AB e la tangente r in B alla circonferenza. Fatta uscire da A una retta qualunque s, essa intersechi la circonferenza in C e la retta r in D. Si prenda poi su s un punto P tale che AP = CD. Il luogo dei punti P al variare di s descrive la cissoide, curva che permette un'elegante rettificazione della circonferenza.

Concoide

La **concoide di Nicomede** (fig.9) è una linea piana di equazione cartesiana $(x - b)^2\,(x^2 + y^2) - a^2\,y^2 = 0$.

In generale si dice concoide di una curva rispetto ad un punto A il luogo dei punti P appartenenti ad una retta r uscente da A, tali che il segmento da essi individuato abbia misura costante 2 a e che il punto medio di tale segmento coincida con l'intersezione tra la curva data e la retta r. La concoide di Nicomede è la concoide di una retta.

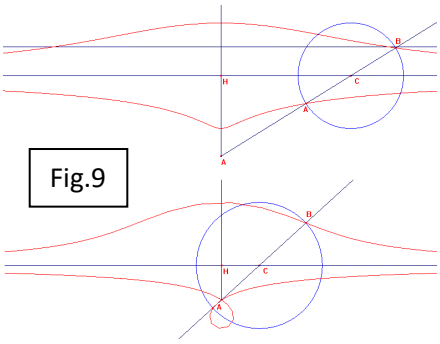


Fig.9

Catenaria

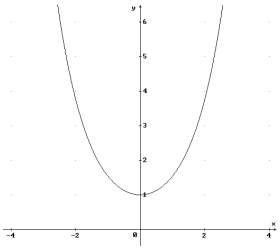


Fig.10

La **catenaria** (fig.10) è una linea piana di equazione cartesiana

$$y = (e^{x} + e^{-x})/2.$$

Tale funzione prende il nome di **coseno iperbolico**, e la catenaria rappresenta la linea determinata da una catena o da una fune vincolata agli estremi e sottoposta solo al proprio peso, come ci dimostra la fotografia successiva.

Cubica

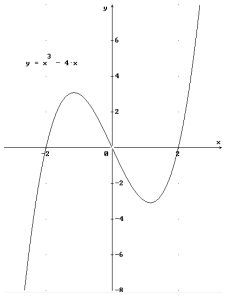


Fig.11

La **cubica** (fig.11) è una linea piana di equazione cartesiana

$$y = a x^3 + b x^2 + c x + d,$$

con a, b, c, d parametri reali. Essa ha al massimo tre intersezioni con l'asse delle ascisse, due estremi relativi (un massimo e un minimo) ed un flesso. La cubica in figura ha equazione $y = x^3 - 4x$.

Curva k

La **curva k** (fig.12) è la linea piana definita come luogo dei punti di tangenza di due rette uscenti dall'origine con una circonferenza di raggio fisso e centro sull'asse x, al variare dell'ascissa di questo centro. È simmetrica rispetto all'asse y.

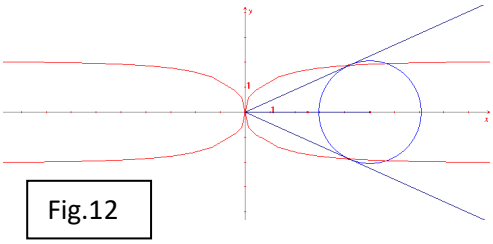
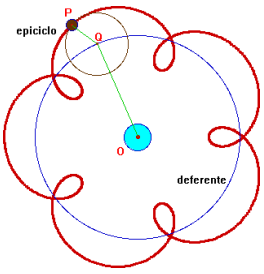


Fig.12

Epicicloide



L'**epicicloide** (fig.13) è il luogo descritto dal punto P di una circonferenza detta **epiciclo** che ruota di moto uniforme, mentre il suo centro ruota di moto uniforme su un'altra circonferenza detta **deferente**. Questa curva rappresenta il moto dei pianeti attorno alla Terra nel modello tolemaico, che infatti è detto modello ad epicicli.

Fig.13

Folium di Cartesio

Si dice **folium di Cartesio** (fig.14) la linea piana di equazione cartesiana

$$x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0.$$

Essa è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, essendo invariante rispetto allo scambio tra loro di x e y, ed è dotata di un punto doppio nodale, perchè il termine di grado minimo è di secondo grado (xy). Uguagliando a zero questo termine si hanno le due tangenti nodali, che coincidono con i due assi cartesiani.

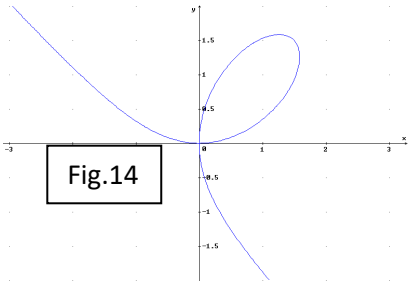


Fig.14

Funzione omografica

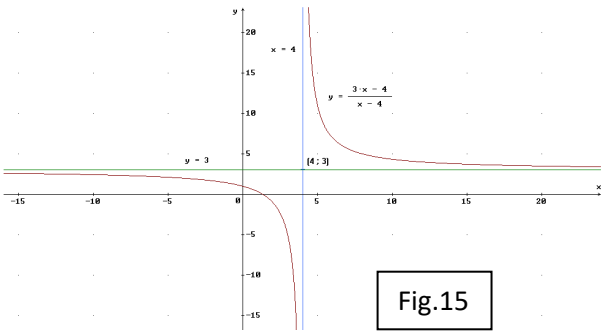


Fig.15

La **funzione omografica** (fig.15) è una linea piana di equazione cartesiana

$$y = (a\,x + b)/(c\,x + d).$$

Il suo nome deriva dal fatto che questa è anche l'equazione di una trasformazione chiamata omografia. Si tratta di una **iperbole equilatera** con gli assi paralleli agli assi cartesiani ed avente centro nel punto

$$(-\,a/c\,;\,d/c\,).$$

Curva di Gauss

La **curva di Gauss** o **gaussiana** (fig.16) è una linea piana di equazione cartesiana

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

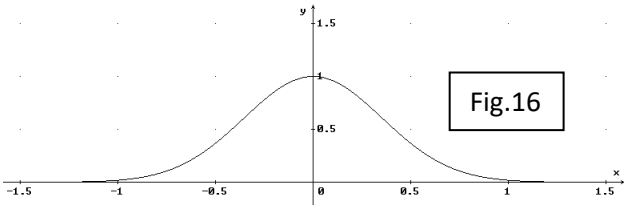


Fig.16

dove σ è detto **scarto quadratico medio**. Essa esprime la distribuzione degli errori commessi nelle misure di una certa grandezza.

Lemniscata

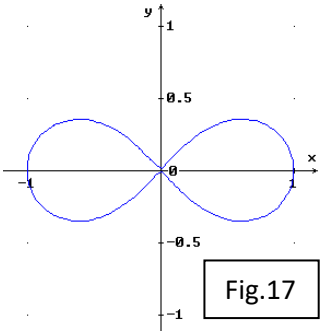


Fig.17

La **lemniscata di Bernoulli** (fig.17) è una linea piana di equazione cartesiana

$$(x^2 + y^2)^2 - a\,(x^2 - y^2) = 0.$$

Il suo nome deriva da lemnisco, " palma"; si tratta del luogo dei punti di un piano per i quali il prodotto delle distanze da due punti fissi F', F è costante ed uguale al quadrato della semidistanza dei due punti; è una quartica razionale con un punto doppio nodale, come conferma il fatto che i termini di secondo grado, se uguagliati a zero, danno $y = \pm\,x$, le due tangenti nel punto doppio.

Curve di Lissajous (Jules Antoine Lissajous, fisico belga, 1822 - 1880)

Le **curve di Lissajous** (fig.18) sono linee piane di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = a \cos(nt + c) \\ y = b \operatorname{sen}(mt + d). \end{cases}$$

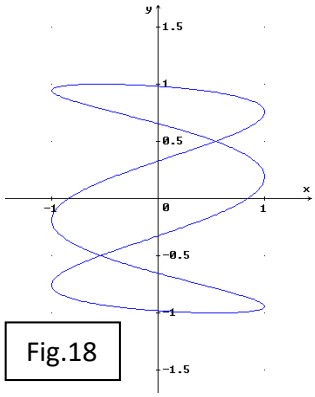


Fig.18

dove a e b sono costanti che rappresentano le oscillazioni, n ed m numeri interi positivi e primi tra loro che esprimono le frequenze, t la variabile tempo, c e d numeri espressi in radianti che rappresentano le fasi. Il rapporto n/m determina la configurazione della figura.

Casi particolari

1) Se tale rapporto è uguale a 1,cioè se n = m, la figura risulta essere, in generale, un'ellisse;

2) Se n = m ed anche a = b con c = π/2 e d = 0, allora la figura diventa una circonferenza, (moti oscillatori tra loro in quadratura), o degenera a un segmento nel caso in cui sia anche c = 0 (moti oscillatori tra loro in fase);

3) Se n/m = 2 e c = d = 0 allora la figura di Lissajous è la parabola.

Altri rapporti producono curve più complicate, che sono chiuse solo se il rapporto n/m è un numero razionale. La forma di queste curve spesso ricorda un nodo tridimensionale, e in effetti molti tipi di nodi, quando vengono proiettati su un piano, diventano figure di Lissajous.

Rivestono notevole importanza in fisica, poiché descrivono l'interferenza di due moti oscillatori perpendicolari di frequenze diverse tra di loro e con una determinata differenza di fase. In figura 18 la differenza di fase è di 45° ed il rapporto tra le due frequenze è pari ad 1/3.

Lumaca di Pascal

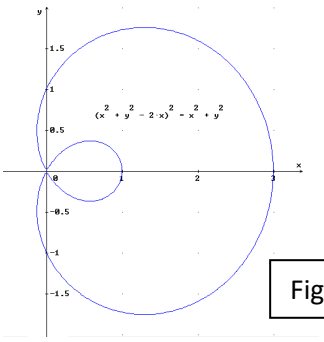


Fig.19

La **lumaca di Pascal** ha equazione cartesiana

$$(x^2 + y^2 - 2\,a\,x)^2 - b^2\,(x^2 + y^2) = 0$$

ed è la concoide della circonferenza. Il nome Pascal non è il Blaise ma suo padre Etienne. La lumaca in figura (fig.19) ha equazione

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = x^2 + y^2.$$

Una dimostrazione del teorema di Torricelli

Siano le due funzioni **$y = 1/(1+x^2)$** e **$y = \text{arc tg } x$**, (integrale indefinito della prima) e disegniamo i relativi grafici, ottenuti mediante il solito software Derive (fig.20).
Osserviamo che dove si annulla la seconda (nell'origine), la prima ha un massimo nel punto (0;1), a riprova del **teorema di Torricelli-Barrow** secondo cui la derivata della primitiva di una funzione coincide con la funzione stessa.

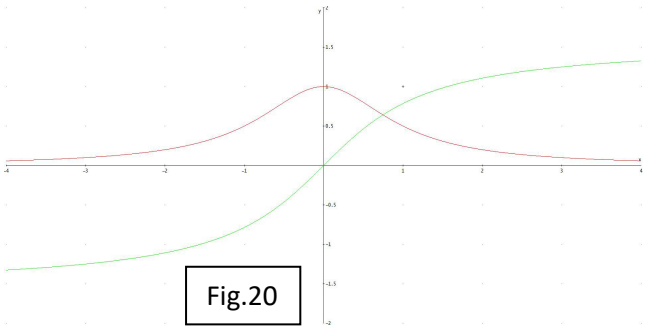


Fig.20

Quartica

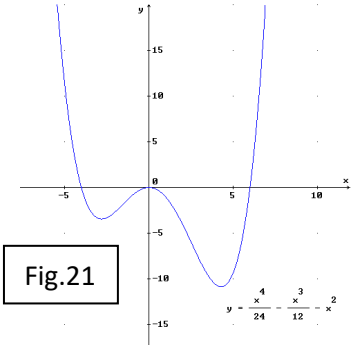


Fig.21

La **quartica** è una linea piana di equazione cartesiana

$$y = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e,$$

con a, b, c, d, e parametri reali. Essa ha al massimo quattro intersezioni con l'asse delle ascisse, tre estremi relativi (due massimi e un minimo oppure due minimi e un massimo) e due flessi, uno ascendente e uno discendente. La curva in figura (fig.21) ha equazione $y = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} - x^2$.

Rodonea

La **rodonea** (fig.22) è una linea piana con equazione polare

$$r = a \text{ sen } (k\,\alpha) \text{ oppure } y = a \cos (k\,\alpha).$$

Se k è un numero intero essa ha k "petali" o 2k "petali" (in figura se ne hanno cinque per k=5), a seconda che k sia dispari o pari. Se k è un numero irrazionale la rodonea ha infiniti "petali".

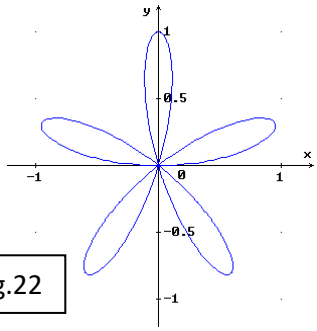


Fig.22

Seno iperbolico

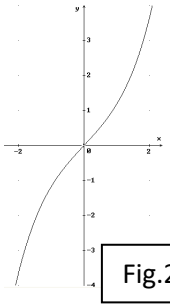


Fig.23

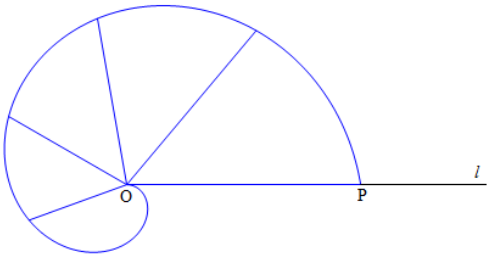
Il **seno iperbolico** (fig.23) è la funzione

$$y = (e^x - e^{-x})/2,$$

in coordinate cartesiane. Il seno iperbolico e il coseno iperbolico costituiscono le **funzioni iperboliche**, in analogia alle funzioni circolari (seno e coseno).

Spirale di Archimede

Nel suo libro "***Sulle spirali***" Archimede dà una descrizione cinematica della curva: una retta l che ha un estremità fissata in O ruota uniformemente; su di essa si muove di moto uniforme un punto P. La curva descritta dal punto P è la spirale di Archimede (vedi figura accanto).



Dalla descrizione si capisce che in ogni punto il raggio r è direttamente proporzionale all´angolo α, quindi si ottiene la seguente equazione polare:

$$r = k\,\alpha.$$

La **spirale di Archimede** (fig.24) è una linea piana.
Pur essendo una delle curve più conosciute anche a livello intuitivo, essa ha una rappresentazione cartesiana difficilissima.

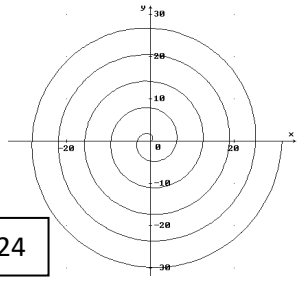


Fig.24

Strofoide

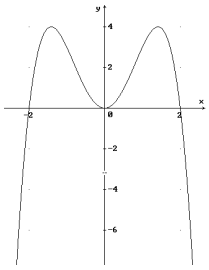


Fig.25

La **strofoide** (fig.25) è invece una linea piana di equazione cartesiana

$$x^2\,(a - x) - y^2\,(a + x) = 0.$$

E' una funzione pari e priva di punti doppi, come si ricava dal fatto che i termini di grado minimo sono di primo grado.

Tangente iperbolica

La **tangente iperbolica** è la funzione

$$y = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}),$$

la cui rappresentazione cartesiana è riportata in figura 26. È così chiamata perché si ottiene come rapporto tra il seno iperbolico ed il coseno iperbolico. Le figure mostrano chiaramente come le funzioni iperboliche, a differenza di quelle circolari, nel campo reale non siano periodiche. Lo diventano però nel campo complesso.

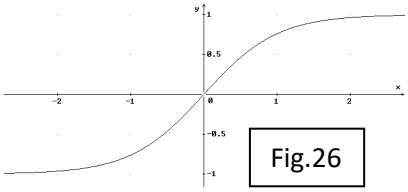


Fig.26

Coseno iperbolico

Il **coseno iperbolico** (fig.27) è la funzione

$$y = (e^x + e^{-x})/2,$$

in coordinate cartesiane.

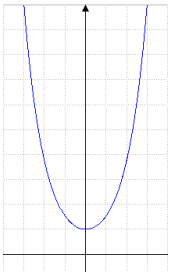


Fig.27

Versiera di Agnesi

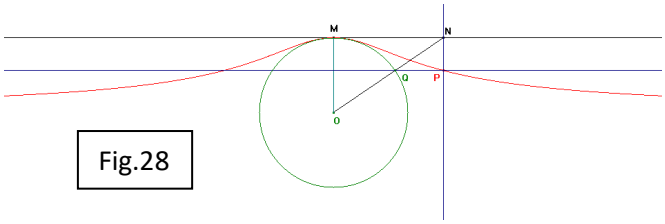


Fig.28

La **versiera di Agnesi** (fig.28) ha equazione cartesiana

$$(a^2 + x^2)\, y = a^3.$$

Il suo nome deriva da quello della grande matematica italiana milanese **Maria Gaetana Agnesi** (1718-1799) che la studiò in un suo trattato del 1748. Per disegnarla si consideri una circonferenza ed un suo punto M; si tracci la tangente t in M e si faccia uscire dal centro della circonferenza una semiretta r che interseca la circonferenza in Q e la retta t in N. Da Q si traccia la parallela a t e da N la perpendicolare a t, e queste due rette si incontrano in P. Al variare della semiretta r il punto P descrive la versiera di Agnesi.

Geometria solida (alcuni solidi)

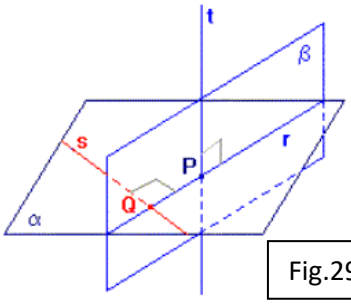


Fig.29

Spostiamoci ora nell'ambito della **geometria solida**. Nella figura 29 si vede illustrato il cosiddetto **teorema delle tre perpendicolari**: se dal piede di una perpendicolare ad un piano si traccia la perpendicolare ad una retta di questo piano, quest'ultima è perpendicolare al piano individuato dalle prime due rette.

Teorema di Dandelin (matematco belga,1794-1847)

Nella figura 30 è illustrato il cosiddetto **teorema di Dandelin**:

*"Tagliando una superficie conica indefinita con un piano π si ottiene una sezione a forma di **ellisse**; i **fuochi** dell'ellisse sono i punti di tangenza con il piano delle due sfere inscritte in ciascuna delle due zone di spazio in cui il cono è tagliato dal piano π, e tangenti al piano. Se il piano è perpendicolare all'asse del cono si ha una **circonferenza** ed i fuochi coincidono nel suo centro. Se il piano è parallelo ad una generatrice del cono si ha una **parabola** ed il fuoco è uno solo (l'altro va all'infinito). Se il piano è ancora più inclinato si ha un'**iperbole**, i cui fuochi coincidono con i punti di tangenza con esso delle sfere tangenti internamente alla superficie conica. Se il piano è parallelo all'asse del cono si ha un'**iperbole equilatera**".*

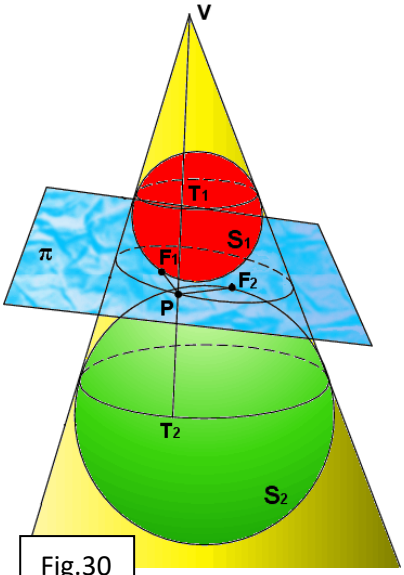


Fig.30

Poliedri archimedei

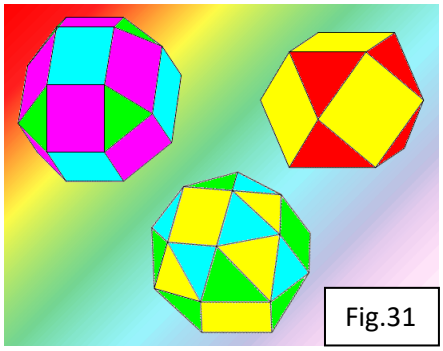


Fig.31

Si dicono **poliedri o solidi archimedei** quelli le cui facce sono poligoni regolari, ma non necessariamente dello stesso tipo (mentre i poliedri platonici hanno tutte le facce uguali). Prendono il nome da Archimede che li trattò per primo in un'opera andata perduta. Hanno la caratteristica di avere tutti gli spigoli uguali. I solidi archimedei sono 13.
Nella figura 31 sono riportati tre esempi costruiti con quadrati e triangoli equilateri. A partire dal basso e in senso antiorario abbiamo il cubottaedro camuso, il cubottaedro e il rombicubottaedro.

Un altro solido archimedeo è l'**icosaedro troncato** (fig.32) da cui si ricava il classico pallone da calcio. Esso ha 32 facce, di cui 20 esagoni regolari e 12 pentagoni regolari.

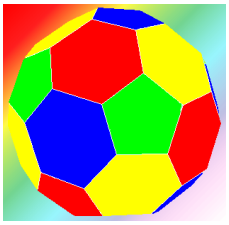


Fig.32

Relazione di Eulero

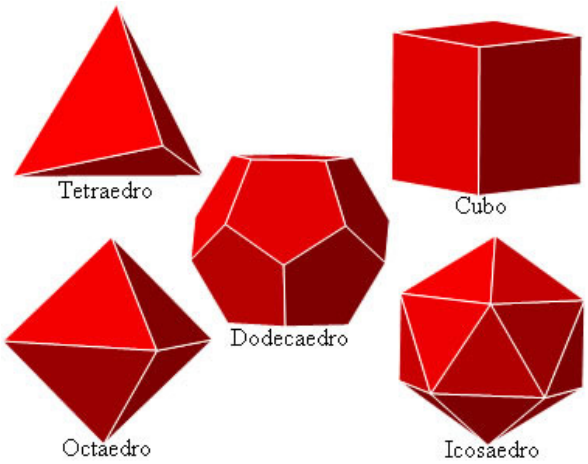
Indicati con s, f e v i numeri rispettivamente degli spigoli, delle facce e dei vertici di un poliedro, tra di essi vale la **relazione di Eulero** :

$$s + 2 = f + v$$

Nel caso del pallone, per esempio, il numero degli spigoli è s=90, quello delle facce è f=32, mentre il numero dei vertici è v=60. Pertanto 90+2 = 32+60.

Solidi Platonici

Il nome deriva da Platone, filosofo greco Atene,428/427 a.C. – Atene, 348/347 a.C, che li studiò per primo.
I solidi platonici sono **cinque** (fig.33): il **tetraedro** regolare che ha 4 facce che sono triangoli equilateri, il **cubo** (o esaedro) che ha 6 facce a forma di quadrato, l'**ottaedro** regolare che ha 8 facce a forma di triangoli equilateri, il **dodecaedro** regolare che ha 12 facce a forma di pentagono e l'**icosaedro** regolare che ha 20 facce a forma di triangoli equilateri. Sono caratterizzati dal fatto di avere tutte le facce, tutti gli spigoli e tutti gli angoli solidi uguali tra di loro.



Poliedro	V	F	S
tetraedro	4	4	6
ottaedro	6	8	12
cubo	8	6	12
icosaedro	12	20	30
dodecaedro	20	12	30

Fig.33

Scodella di Galileo

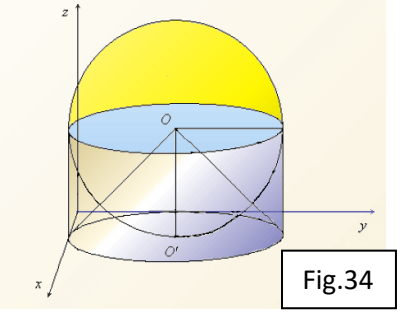


Fig.34

Dicesi **scodella di Galileo** (fig.34) il solido delimitato da una semisfera e dal cilindro ad essa circoscritto che ha come base il suo cerchio massimo e come altezza il suo raggio. Mediante il principio di Cavalieri si dimostra che essa è equivalente al cono che ha la stessa base e la stessa altezza del cilindro considerato, e questo risultato è utilizzato per determinare il volume della sfera.

Toro

Il **toro** (fig.35) è una superficie ottenuta facendo ruotare una circonferenza attorno ad una retta ad essa complanare e che non la attraversa.

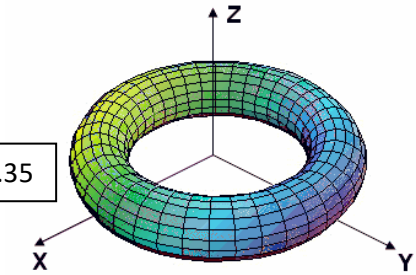


Fig.35

Quadriche

Ellissoide

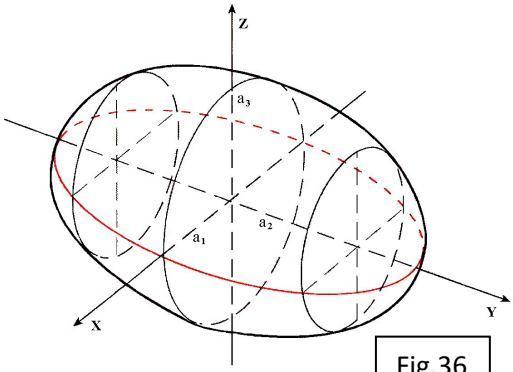


Fig.36

L'**ellissoide** (fig.36) è una superficie chiusa del secondo ordine che si ottiene facendo ruotare un'ellisse attorno ad uno dei suoi assi. Le sezioni sono, ovviamente, delle ellissi.

La sua equazione cartesiana è

$$x^2/a_1{}^2 + y^2/a_2{}^2 + z^2/a_3{}^2 = 1,$$

dove a, b e c sono i tre semiassi. Se a = b = c l'ellissoide diventa una superficie sferica. È una quadrica come tutte le superfici espresse da equazioni di secondo grado.

Iperboloide a due falde

Questa superficie è nota come **iperboloide a due falde** (fig.37) ed ha equazione cartesiana

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1.$$

Insieme all'ellissoide, alla sfera e al paraboloide forma la famiglia delle **quadriche**, superfici la cui equazione cartesiana obbedisce ad un'equazione di secondo grado in x, y e z.

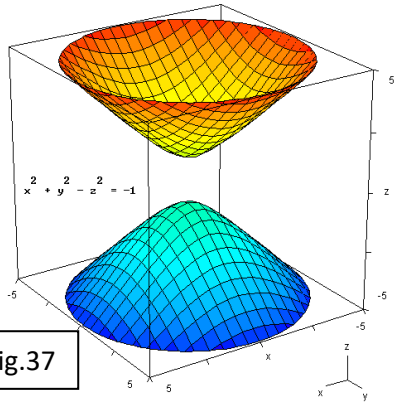


Fig.37

Iperboloide ad una falda

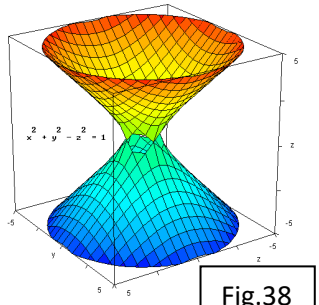


Fig.38

Questa superficie è nota come **iperboloide ad una falda** (fig.38) ed ha equazione cartesiana

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1.$$

A differenza della precedente è una **quadrica rigata**, cioè in essa giace una famiglia di rette.

Iperboloide degenere

Questa superficie è invece un **iperboloide degenere** (fig.39) di equazione cartesiana

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0.$$

Come si vede, poiché manca il termine noto 1 della precedente equazione, essa degenera in una comune superficie conica.

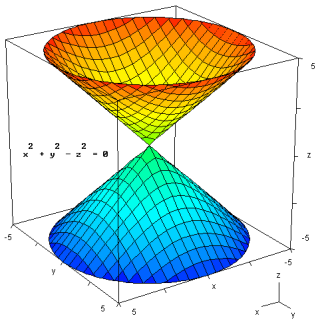
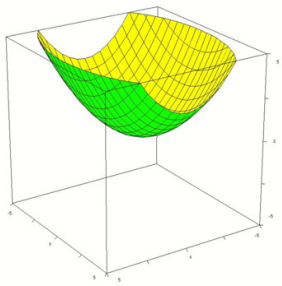


Fig.39

Paraboloide

Il paraboloide è una superficie che si ottiene facendo ruotare una parabola attorno al suo asse (vedi paraboloide circolare di fig.41, più giù).
Possiamo avere:

Paraboloide ellittico



Questa superficie è nota come **paraboloide ellittico** (fig.40) ed ha equazione cartesiana

$$z = x^2/a^2 + y^2/b^2.$$

Esso fa parte della famiglia delle quadriche, ma non è una quadrica rigata.

Fig.40

Il nome di paraboloide ellittico deriva dal fatto che le sezioni che si ottengono con un piano sono delle ellissi (fig.40)

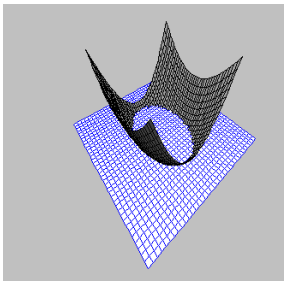


Fig.40

Paraboloide iperbolico o a sella

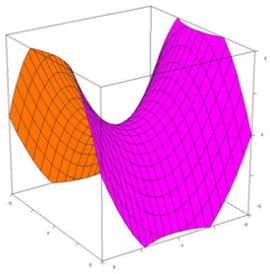


Fig.42

Questa superficie è nota come **paraboloide iperbolico** (fig.42) ed ha equazione cartesiana

$$z = x^2/a^2 - y^2/b^2.$$

A differenza del precedente esso è una quadrica rigata.
Il nome di paraboloide iperbolico deriva dal fatto che le sezioni che si ottengono con un piano sono delle iperboli (fig.43)

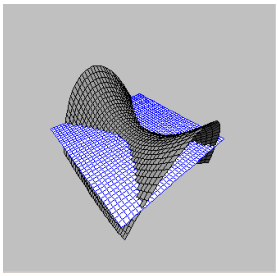


Fig.43

Paraboloide circolare

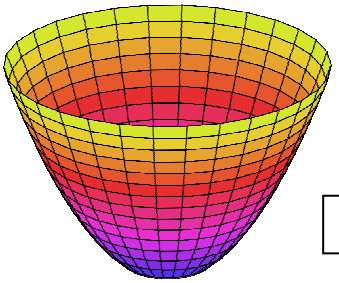


Fig.44

Se nell'equazione del paraboloide ellittico a = b allora si ha il paraboloide circolare ed assume la forma di figura 43. L'equazione cartesiana è

$$a^2z = x^2 + y^2$$