EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Il termine “equazione differenziale“ è dovuto a Leibniz (Gottfried Wilhelm Von Leibniz,1646-1716), mentre i termini di “integrale generale” e “integrale particolare” sono di Eulero (1707-1783).

- **Definizioni 1**: si dice **equazione differenziale** una relazione che lega la variabile indipendente, una sua funzione e le derivate di tale funzione di ordine n (cioè derivabile n volte).

a) Se la funzione è di una sola variabile, l’equazione presenta solo derivate ordinarie e viene detta “**equazione differenziale ordinaria**”;
b) Se la funzione è funzione di più variabili (per cui le derivate si effettuano rispetto ad una sola variabile), essa viene detta “**equazione alle derivate parziali**”.

In questi appunti riporto soltanto alcune equazioni differenziali ordinarie.

Considerazioni di carattere generale sulle equazioni differenziali.

- **Soluzioni di un’equazione differenziale**: sono integrali che differiscono tra loro per una costante.

- **L’insieme delle soluzioni** di un’equazione differenziale è detto “**integrale generale**” dell’equazione.

Siano le seguenti altre:

- **Definizione 2**: si dice **ordine** (o grado) di un’equazione differenziale il più alto grado di derivazione che vi compare.

Esempio: sia l’equazione differenziale
$$y'' + 3y' - y^4 = 0$$
È del 2° ordine perché 2 è l’ordine massimo (y'') di derivazione.
Nota bene che l’esponente 4 di y^4 non c’entra niente con l’ordine.

- **Definizione 3**: Un’equazione differenziale si dice che è in **forma normale** quando è scritta in forma esplicita rispetto alla derivata di ordine massimo.

Nell’esempio di prima l’equazione è in forma normale quando è scritta cosi
$$y'' = -3y' + y^4$$

Un’equazione differenziale ordinaria lineare ha la forma generale

$$(1) \qquad \boldsymbol{\alpha_0(x)y^{(k)} + \alpha_1(x)y^{(k-1)} + \alpha_2(x)y^{(k-2)} + \cdots + \alpha_n(x)y = g(x)}$$

dove k è l’ordine dell’equazione e gli $\boldsymbol{\alpha_j}$ (con j=0,1, 2, ..., k) **sono** detti **coefficienti** dell’equazione; mentre $\boldsymbol{g(x)}$ è detto **termine noto**. I coefficienti e $g(x)$ sono funzioni della variabile indipendente x. La y, di primo grado, è detta funzione incognita dell’equazione differenziale.

- Se $g(x) = 0$, allora l’equazione si dice **omogenea.**

Risolvere un'equazione differenziale, ripeto, **significa trovare la funzione incognita y in funzione della x.**

- Se gli α_j, con j=0,1, 2, ..., k-1, sono tutti costanti, allora l'equazione differenziale si dice **"a coefficienti costanti".**

Esempio:
La $y'' + 3y' - y^4$ =0 ha coefficienti tutti costanti (1, +3, -1).
Mentre $y^{(3)} + xy'' - y = 0$ non è a coefficienti costanti perché il coefficiente di y'', cioè la x, non è costante.

<u>OSSERVAZIONE</u>

Sia y una funzione; consideriamo una sua derivata con ordine qualsiasi, per esempio $y^{(3)}$. Ebbene, l'esponente di $y^{(3)}$ è 1, cioè $(y^{(3)})^1 = y^{(3)}$.
Mentre se si ha $(y'')^3$ allora l'esponente è 3. In altre parole **l'esponente** non **è** l'ordine ma **la potenza della derivata.**

- **Definizione 4**: Un'equazione differenziale è **lineare** quando sia la y (la funzione incognita) sia le sue derivate hanno tutti esponente 1.

Esempio:
$y^{(3)} + xy'' - y = 0$ è lineare perché tutti i termini dell'equazione hanno esponente 1.

- **Definizione 5**: un'equazione differenziale è **non lineare** quando la y o una sua derivata ha esponente diverso da 1.

Esempio:
L'equazione differenziale $y' + y^2 + x - 1 = 0 \rightarrow y' + y^2 = -x + 1$ non è lineare perché la funzione y ha esponente 2. È di ordine 1 perché il suo massimo ordine è 1: y'. È a coefficienti costanti. Non è omogenea perché c'è il termine noto $g(x) = -x + 1$.

Riprendo l'equazione differenziale ordinaria

$$\boldsymbol{\alpha_0(x)y^{(k)} + \alpha_1(x)y^{(k-1)} + \alpha_2(x)y^{(k-2)} + \cdots + \alpha_n(x)y = g(x)}$$

Si dice che **f è soluzione** o **integrale** dell'equazione generale se, sostituita nell'equazione, la verifica. Cioè se

$$\boldsymbol{\alpha_0(x)f^{(k)} + \alpha_1(x)f^{(k-1)} + \alpha_2(x)f^{(k-2)} + \cdots + \alpha_n(x)f = g(x)}$$

diventa un'identità.

<u>Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separate</u>

Sono del tipo

$$\boldsymbol{A(x)dx + B(y)dy = 0}$$

Cioè sono tali che $A(x)$, coefficiente di dx è funzione della sola variabile x, mentre $B(y)$, coefficiente di dy è funzione della sola y.
L'integrale generale è dato da

$$\int A(x)dx + \int B(y)dy = c$$

Esempio:

$$y' - \frac{1}{x} = 2$$

Si risolve

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} = 2 \rightarrow\ dy = (\frac{1}{x} + 2) \rightarrow \int dy = \int \left(\frac{1}{x} + 2\right) dx \rightarrow\ \int dy = \int \left(\frac{1}{x}\right) dx + \int 2dx \rightarrow$$

$$y = ln|x| + 2x + c$$

<u>Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili</u>

Si presentano nella forma

$$A(x) \cdot B(y) = C(x) \cdot D(y)y' \rightarrow \boldsymbol{A(x) \cdot B(y)dx = C(x) \cdot D(y)dy} \qquad \text{(con } y' = \tfrac{dy}{dx}\text{)},$$

dove $A\ e\ C$ sono funzioni continue e univocamente definite nel dominio $I_1 \subset \mathbb{R}$ e $B\ e\ D$ funzioni continue e univocamente definite nel dominio $I_2 \subset \mathbb{R}$.
Nell'intervallo comune $I = I_1 \cap I_2$ vanno ricercate le soluzioni (gli integrali) dell'equazione.
Prima di separare le variabili osserviamo che se esiste un $y_0 \epsilon I_2$ tale che $B(y_0) = 0$, per cui $C(x) \cdot D(y_0)y' = 0$, allora la funzione $y(x) = y_0$ è soluzione dell'equazione

$$A(x) \cdot B(y)dx + C(x) \cdot D(y)dy = 0.$$

Le soluzioni del tipo $y(x) = y_0$ vengono dette **<u>stazionarie</u>**.
Al netto delle soluzioni stazionarie, per ogni altro valore $y \epsilon I_2$, $y \neq 0$, possiamo scrivere

$$\frac{A(x) \cdot B(y)}{B(y) \cdot C(x)} dx = \frac{C(x) \cdot D(y)}{B(y) \cdot C(x)} dy \rightarrow\ \frac{A(x)}{C(x)} dx = \frac{D(y)}{B(y)} dy$$

che è a variabili separate e si procede come sopra.

L'integrale generale è $\quad \int \boldsymbol{\frac{A(x)}{C(x)} dx} = \int \boldsymbol{\frac{D(y)}{B(y)} dy}$

Esempio:
Sia l'equazione differenziale a variabili separabili

$$y' = y^2$$

Una soluzione stazionaria è $y = 0$.
Per $y \neq 0$, possiamo scrivere

$$y' = y^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 \rightarrow dy = y^2 dx \rightarrow\ \frac{dy}{y^2} = dx$$

da cui, passando agli integrali, si ha

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int dx \rightarrow \int y^{-2}\, dy = x + c \rightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = x + c \rightarrow -\frac{1}{y} = x + c \rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{x + c}$$

Le soluzioni sono la stazionaria $y = 0$ e quella generale $y = -\frac{1}{x+c}$.

<u>Equazioni differenziali lineari del primo ordine</u>

L'equazione differenziale lineare del primo ordine fu approfondita da Bernoulli [1] (Johann, 1667-1748) nel 1726 ma già nel 1694 Leibniz aveva trovato la formula risolutiva.

Sono del tipo

$$\boldsymbol{y' + a(x)y = b(x)}$$

dove $a(x)$ e $b(x)$ sono due funzioni note e continue.

1. Se $\boldsymbol{b(x) = 0}$ allora l'equazione diventa **omogenea**

   $$\boldsymbol{y' + a(x)y = 0}$$

   Posto $y' = \frac{dy}{dx}$, l'equazione si scrive

   $$\frac{dy}{dx} = -a(x)y$$

   da cui

   $$\frac{dy}{y} = -a(x)dx.$$

   Integrando

   $$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx + c \rightarrow ln|y| = -\int a(x)dx + ln(c) \rightarrow ln|y| - l\,n(c) = -\int a(x)dx \rightarrow$$
   $$ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int a(x)dx \rightarrow \frac{y}{c} = e^{-\int a(x)dx} \rightarrow$$

   $$\boldsymbol{y = c \cdot e^{-\int a(x)dx}}$$

2. Se $\boldsymbol{b(x) \neq 0}$, l'equazione **non è omogenea**. Per risolvere questa equazione si ricorre alla formula (alquanto complicata nella forma)

   $$\boldsymbol{y = e^{-\int a(x)dx} \cdot \left(\int b(x) \cdot e^{\int a(x)dx}\, dx + c\right)}$$

<u>PROBLEMA di CAUCHY</u> (PdC)

Ho già detto che l'integrale generale è l'insieme degli integrali (soluzioni) che differiscono per una costante c.
Per trovare un integrale particolare (una soluzione particolare) bisogna calcolare il valore della costante c.
Per fare ciò si hanno bisogno di un **<u>valore iniziale</u>** $\boldsymbol{y_0}$ e di un **<u>punto iniziale</u>** $\boldsymbol{x_0}$.
Cioè si tratta di risolvere il cosiddetto **problema di Cauchy** (**PdC**).

Si dice Problema di Cauchy relativo all'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$\boldsymbol{y' + a(x)y = b(x)}$$

nel punto

$$\boldsymbol{P(x_0, y_0)}$$

e si indica con

$$\begin{cases} \boldsymbol{y' + a(x)y = b(x)} \\ \boldsymbol{y(x_0) = y_0} \end{cases}$$

Il problema di determinare una soluzione $\boldsymbol{y(x)}$ dell'equazione data e che passa per il punto $\boldsymbol{P(x_0, y_0)}$.

La scrittura $\boldsymbol{y(x_0) = y_0}$ significa che per $\boldsymbol{x = x_0}$ si ha $\boldsymbol{y = y_0}$.
Sia un **esempio** di PdC: Sia

$$\begin{cases} y' = y^2 \ (eq. diff. a\ variabili\ separabili) \\ y(0) = 1 \qquad\qquad\qquad (x_0 = 0, y_0 = 1) \end{cases}$$

Risolvo prima l'equazione differenziale, cioè trovo prima l'integrale generale, osservando che da

$$y' = y^2 \to \frac{dy}{dx} = y^2 \to dy = y^2 dx \to \frac{dy}{y^2} = dx$$, da cui integrando si ha:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int dx \to \int y^{-2}\, dy = x + c \to \frac{y^{-1}}{-1} = x + c \to -\frac{1}{y} = x + c \to y = -\frac{1}{x+c}$$

in quest'ultima espressione sostituisco il punto e il valore iniziali $x_0 = 0, y_0 = 1$ ed ottengo

$$1 = -\frac{1}{0+c} \to c = -1$$

Quindi una soluzione dell'equazione differenziale è: $y = -\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$

Verifico che questa è effettivamente una soluzione dell'equazione:

da $\qquad y = \frac{1}{1-x} \to y' = \frac{1}{(1-x)^2}$

mentre da $\qquad y = \frac{1}{1-x} \to y^2 = \frac{1}{(1-x)^2}$

Quindi $y' = y^2$ è verificata.

<u>Equazione differenziale del primo ordine non-lineare.</u>

Se nell'equazione differenziale la y o una sua derivata compaiono con un esponente diverso da 1, allora l'equazione si dice non-lineare.
Qui di seguito riporto le equazioni di Bernoulli (Jakob, 1655-1705) e di Clairaut (Alexis Claude, 1713-1765).

Equazione di Bernoulli [(1)]
È del tipo

$$\boldsymbol{y' + a(x)y = b(x)y^n}$$

dove $n \neq 0$ e $n \neq 1$, perché se cosi non fosse si avrebbe un'equazione lineare. Tale equazione può essere trasformata in una equazione lineare, procedendo nel modo seguente:

divido ambo i membri per y^n

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{a(x)}{y^{n-1}} = b(x) \to \frac{y'}{y^n} + a(x)y^{1-n} = b(x)$$

Pongo $\quad t = y^{1-n} \to t' = (1-n)y^{1-n-1}y' \to t' = (1-n)y^{-n}y' \to \boldsymbol{\frac{t'}{1-n} = \frac{y'}{y^n}}$

(1) La famiglia Bernoulli era originaria di Anversa. Nel 1583 fuggì da questa città per sottrarsi al massacro degli Ugonotti nei confronti dei cattolici. Dopo essersi rifugiata a Francoforte sul Meno, si trasferì definitivamente in Svizzera, a Basilea. La famiglia Bernoulli diede i natali a ben otto matematici e scienziati. I più illustri sono: Jakob (1655-1705), Johann (1667-1748) fratello di Jakob e Daniel (1700-1782) figlio di Johann e nipote di Jakob.

Sostituendo, l’equazione si scrive

$$\frac{t'}{1-n}+a(x)t=b(x)$$

e quindi

$$\boldsymbol{t'+(1-n)a(x)t=b(x)}$$

che è un’equazione differenziale lineare.
Faccio un **esempio**.
Sia l’equazione

$$y'+2xy-xy^3=0 \rightarrow y'=-2xy+xy^3$$

Devo ridurla ad una equazione differenziale lineare del primo ordine.

1. Divido ambo i membri per y^3
$$\frac{y'}{y^3}=-\frac{2xy}{y^3}+\frac{xy^3}{y^3} \rightarrow \frac{y'}{y^3}=-\frac{2x}{y^2}+x \rightarrow$$
$$\frac{y'}{y^3}=-2xy^{-2}+x \qquad (1)$$
2. Pongo $t=y^{-2}$ (dove t è l’incognita ausiliaria) da cui, derivando si ha
$$t'=-2y^{-3}y'=-2\frac{y'}{y^3} \rightarrow -\frac{1}{2}t'=\frac{y'}{y^3}$$
3. Sostituisco nella (1)
$$-\frac{1}{2}t'=-2xt+x \rightarrow t'=4xt-2x \qquad (2)$$
che è un’equazione differenziale lineare del primo ordine, non omogenea.

4. Risolvo la (2) ricorrendo alla formula suesposta
$$\boldsymbol{y=e^{-\int a(x)dx}\cdot\left(\int b(x)\cdot e^{\int a(x)dx}\,dx+c\right)}$$
dove $a(x)=-4x$ e $b(x)=-2x$ (al posto della y c’è la t),
$$t=e^{-\int -4xdx}\cdot\left[\int -2x\cdot e^{\int -4xdx}dx+c_1\right]=e^{4\frac{x^2}{2}}\cdot\left[\int -2x\cdot e^{-4\frac{x^2}{2}}dx+c_1\right]$$
$$=e^{2x^2}\cdot\left[\int -2x\cdot e^{-2x^2}dx+c_1\right]$$
5. Risolvo l’integrale $\int -2x\cdot e^{-2x^2}\,dx=\int\frac{-4x}{2}e^{-2x^2}dx=\frac{1}{2}\int -4xe^{-2x^2}dx=\frac{1}{2}e^{-2x^2}+c_2$

6. Dunque $\qquad t=e^{2x^2}\left[\frac{1}{2}e^{-2x^2}+\underbrace{c_2+c_1}_{c}\right]=e^{2x^2}\left[\frac{1}{2}e^{-2x^2}+c\right]=c\cdot e^{2x^2}+\frac{1}{2}$

7. Ma $t=y^{-2}$, per cui $t=\frac{1}{y^2}\rightarrow y^2=\frac{1}{t}$
8. In definitiva
$$\boldsymbol{y=\frac{1}{\sqrt{c\cdot e^{2x^2}+\frac{1}{2}}}}$$

<u>Equazione di Clairaut</u>

L'equazione di Clairaut si presenta nella forma

$$\boldsymbol{y = xy' + g(y')}$$

con $g(y')$ funzione della derivata prima a sua volta derivabile.
Posto $t = y'$, un parametro di comodo, le soluzioni sono parametriche, cioè del tipo $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

Sia un **esempio**:

Sia l'equazione

$$y = xy' + \ln(y')$$

derivo rispetto alla x

$$y' = y' + xy'' + \frac{1}{y'} \cdot y'' \to 0 = y''(x + \frac{1}{y'})$$

Da cui si hanno le due equazioni

(1) $$y'' = 0$$

(2) $$x + \frac{1}{y'} = 0$$

Risolvo entrambe
Per la (1) si ha $y'' = 0 \to y' = c$
che sostituisco nell'equazione che si scrive

$$y = xc + \ln(c)$$

Questa rappresenta un **fascio di rette** e viene detto **integrale generale** dell'equazione.
Per la (2), pongo $y' = t$ per cui la (2) si scrive

$$x + \frac{1}{t} = 0 \to x = -\frac{1}{t}$$

mentre l'equazione di partenza si scrive

$$y = -\frac{1}{t} \cdot t + \ln(t) \to y = \ln(t) - 1 \qquad (1')$$

Raccogliendo, si ha

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{t} \\ y = \ln(t) - 1 \end{cases} \qquad (2')$$

Quest'ultima espressione rappresenta **l'integrale singolare**, in forma parametrica. L'integrale singolare è detto **curva inviluppo del fascio di rette**.