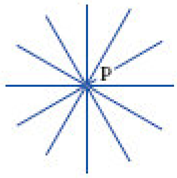
Equazione della retta

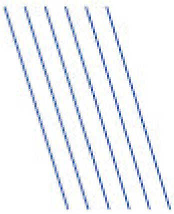
Fissato un punto P nel piano euclideo, per esso passano infinite rette; tutte queste rette formano un fascio che viene detto **PROPRIO**. Le rette del fascio proprio differiscono per la direzione (coefficiente angolare). Il punto P viene detto centro del fascio.

fascio proprio



Se invece consideriamo tante rette parallele, allora abbiamo un altro tipo di fascio detto **IMPROPRIO**. Le rette del fascio improprio hanno tutte la stessa direzione, cioè lo stesso coefficiente angolare.

fascio improprio



Ora utilizziamo le regole dell'algebra per rappresentare e descrivere le proprietà dei punti e delle rette.

1) Forma esplicita ed implicita dell'equazione di una retta

L'equazione della retta in **forma implicita** è: $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$

Isoliamo il termine che contiene la y

$$by = -ax - c$$

Dividiamo per b (supposto $b \neq 0$) tutti i termini dell'equazione

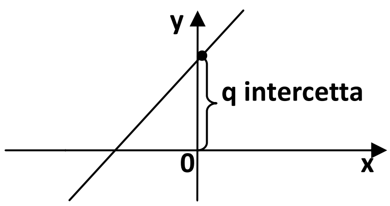
$$\frac{b}{b}y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

E quindi $$\boldsymbol{y = mx + q}$$

Abbiamo, cosi, scritto l'equazione della retta in **forma esplicita**, dove

$$-\frac{a}{b} = m \quad e \quad -\frac{c}{b} = q\ .$$

$\boldsymbol{m}$ è chiamato ***coefficiente angolare*** oppure ***direzione della retta***, $\boldsymbol{q}$ è detta ***intercetta*** della retta sull'asse delle y. Per intercetta si intende il segmento che la retta stacca sull'asse delle y.



Esempio:

Sia *2x-3y+1=0* l'equazione di una retta in forma implicita. Trasformiamola in forma esplicita.

Isoliamo il termine con la *y*

$$-3y = -2x - 1$$

Dividiamo tutti i termini per -3 (coefficiente di *y*)

$$\frac{-3}{-3}y = \frac{-2}{-3}x - \frac{1}{-3}$$

da cui $\quad y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

Il coefficiente angolare è $\frac{2}{3}$

2) Se poi dalla forma esplicita vogliamo ottenere la forma implicita, allora dobbiamo scrivere tutti i termini al primo membro.

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow y - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0;$$

eliminiamo il denominatore 3 con la regola del minimo comune multiplo si ha

$$3y - 2x - 1 = 0;$$

cambiando di segno tutti e ordinando si ha

$$2x - 3y + 1 = 0$$

3) Fascio di rette

Consideriamo un sistema di assi cartesiani e su di esso le coordinate di un punto P(2;1). Per P tracciamo più rette che formano, cosi, il fascio di centro P. Se vogliamo rappresentare tutte queste rette del fascio con una sola equazione procediamo nel modo seguente:

- $y - 1 = m(x - 2)$
- $y = mx - 2m + 1$ (fascio di centro P)

Ebbene, quest'ultima espressione rappresenta l'equazione del fascio di centro P.

Notiamo che il valore di m varia. Se vogliamo una retta particolare del fascio diamo ad m un valore a piacere, per esempio m=-3.

Si ha allora:

$$y = -3x - 2(-3) + 1 = -3x + 6 + 1 = -3x + 7 \rightarrow y = -3x + 7.$$

La relazione generale che dobbiamo ricordare è:

$$\boldsymbol{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

dove $(x_0\ ;\ y_0)$ sono le coordinate del punto.

4) Se invece abbiamo due punti allora c'è una sola retta che passa per entrambi.

Siano A(-1; 2) e B(3;-2). Per trovare l'equazione della retta passante per A e B ci sono più modi.

Applichiamone uno ricorrendo alla relazione

$$\boldsymbol{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

Dove $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ sono le coordinate dei due punti.

Sostituiamo

$$\frac{y-2}{-2-2} = \frac{x-(-1)}{3-(-1)} \text{ da cui } \frac{y-2}{-4} = \frac{x+1}{4} \text{ e quindi } y - 2 = -(x+1)$$

$$\text{in definitiva } \ y = -x + 1$$

5) Punto medio e distanza fra due punti

Siano A(3;1) e B(2;1) due punti del piano cartesiano. Il loro punto medio M si trova applicando la relazione

$$\text{M} \left(\boldsymbol{\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}}\right)$$

E quindi, sostituendo, $\text{M} \left(\frac{3+2}{2}; \frac{1+1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}; 1\right).$

Mentre la distanza fra i due punti A e B si trova ricorrendo alla seguente

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Quindi $$\overline{AB} = \sqrt{(2-3)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2} = 1$$

6) Rette parallele e rette perpendicolari

Due rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare.

Siano $r: y = mx + q$, $s: y = m'x + q'$ due rette. Allora

$$r \,//\, s \iff m = m'$$

Due rette sono perpendicolari quando il coefficiente angolare dell'una è l'opposto del reciproco del coefficiente angolare dell'altra.

$$r \perp s \Leftrightarrow m' = -\frac{1}{m}$$

Esercizio svolto

Scrivere in forma esplicita l'equazione della retta u: 2x-3y+1=0

Svolgo:

Isolo il termine che contiene la y

$$2x+1=3y$$

Divido per 3 (coefficiente della y) tutti i termini dell'equazione

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}y$$

E quindi l'equazione in forma esplicita

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}.$$

Osservazioni importanti

- **L'asse delle x è una retta orizzontale con pendenza nulla, quindi il suo coefficiente angolare è uguale a zero.**
  L'equazione dell'asse delle x è y=0.
  Una retta parallela all'asse delle x ha coefficiente uguale a zero ed ha equazione del tipo y=k, dove k è un numero.
- **L'asse delle y è una retta verticale con pendenza massima; poiché l'asse delle y è perpendicolare all'asse delle x, il suo coefficiente angolare è l'antireciproco di zero cioè $-\frac{1}{0}$; ma un numero fratto zero in matematica viene indicato con il simbolo di ∞ (infinito), quindi il suo coefficiente angolare è infinito.**
  L'equazione dell'asse delle y è x=0.

Esercizi svolti

- Le due rette di equazione r: y = -x +2 e s: y = -x-4 sono parallele perché hanno lo stesso coefficiente angolare -1**.**
- Le due rette di equazione t: y = 2x+3 e v: y = -2x+1 non sono parallele perché la t ha coefficiente angolare 2 e la v ha coefficiente angolare -2;
- Le due rette *a*: *y = 3x e b*: $y = -\frac{1}{3}x + 2$ sono perpendicolari perché il coefficiente angolare della *b* è $-\frac{1}{3}$ che è l'antireciproco (cioè l'opposto dell'inverso) di 3 coefficiente angolare della retta *a*.

- Sia la retta di equazione $y = 3x + 3$. Disegniamone il grafico. Troviamo le coordinate di almeno due suoi punti nel modo seguente:

x	y	
0	3	per x=0 si ha $y = 3 \cdot 0 + 3 = 3$
-1	0	per y=0 si ha $0 = 3x + 3$ da cui $x = -1$

Grafico

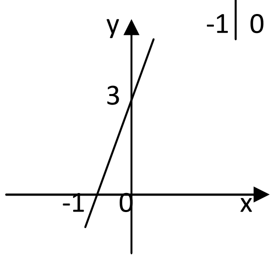


Fig. a

Il valore dell'intercetta q è dato proprio dal termine noto 3 dell'equazione.

Invertiamo l'esercizio: partiamo dal grafico e scriviamo l'equazione della retta che gli corrisponde.
Dalla fig. a si vede che l'intercetta è 3 cioè q=3, per cui l'equazione della retta è del tipo

$$y = mx + 3$$

Calcoliamo il valore del coefficiente angolare *m.* Notiamo prima di tutto che la retta interseca l'asse delle x nel punto (-1;0). Ciò vuol dire che queste coordinate soddisfano l'equazione della retta. Sostituiamo tali coordinate in essa:

$$0 = m(-1) + 3 \ da \ cui \ 0 = -m + 3 \ \ e \ quindi \ m = 3$$

Allora l'equazione della retta è $y = 3x + 3$.