FUNZIONI

Introduzione

Una lingua è fatta di parole; essa si impara soprattutto con la pratica. La matematica, per esprimere i concetti logici, usa un proprio alfabeto fatto di simboli; anche questo si impara mettendolo in pratica. Per i chimici, come per gli altri tecnici, che si interessano delle applicazioni più che delle teorie, la matematica è uno strumento di lavoro.

1.NUMERI

Senza voler entrare nel merito di che cosa è un numero (la cui definizione è "recente") si può senz'altro dire che ogni calcolo matematico ha come risultato finale un numero.
Però è opportuno conoscere i vari tipi di numero che si incontrano nelle applicazioni.
I numeri "naturali" 0, 1, 2,… sono così radicati nella mente dell'uomo che il matematico tedesco **Leopold Kronecker**(1823-1891) ebbe a dire :"*Dio ha fatto gli interi, l'uomo tutti gli altri numeri*".
L'operazione di addizione tra due numeri interi positivi dà come risultato un numero intero positivo. La sottrazione, invece, non sempre si può eseguire.
Esempio: 2+5 = 7, mentre 9-11 presuppone la conoscenza di altri numeri che sono poi i "numeri negativi".
I Greci erano soliti applicare le loro conoscenze matematiche alla geometria i cui elementi venivano espressi con quantità intere positive. Altri popoli, invece, come gli Indiani, avevano una mentalità commerciale; pertanto usavano numeri negativi.
La moltiplicazione può sempre eseguirsi tra numeri interi positivi, dando come risultato un numero ben definito. La divisione fra due numeri presuppone l'esistenza dei "numeri frazionari". L'insieme dei numeri interi e dei numeri frazionari costituisce un insieme più grande che assume il nome di insieme dei "**numeri razionali**" e che i matematici indicano con $\mathbb{Q}$.
Ora si può far vedere agevolmente (ma noi non lo facciamo per brevità) come sia sempre possibile elevare a potenza intera positiva un qualunque numero razionale, mentre l'operazione inversa di estrazione di radice non è sempre possibile senza creare la più vasta classe dei "**numeri irrazionali**": $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π; il numero "**e**" (base dei logaritmi naturali) e l'insieme dei numeri razionali e irrazionali dicesi insieme dei "**numeri reali**" che copre tutti i punti di una linea retta senza lacune. L'insieme dei numeri reali viene indicato con $\mathbb{R}$.
Infine, per giustificare certe espressioni o numeri del tipo $\sqrt{-2}$ e, più in generale, $\sqrt[n]{a}$ con n pari ed $a< 0$, si introduce il numero $\boldsymbol{\sqrt{-1} = i}$ che assume il nome di ***unità immaginaria***, per cui i nuovi numeri:$\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$; $\sqrt[n]{a} = i\sqrt[n]{-a}$, si dicono "**numeri immaginari**". L'insieme dei numeri immaginari viene indicato con $\mathbb{C}$.
Ci sono, poi, numeri costituiti da una parte reale a e di tante unità immaginarie b, e che si scrivono: $a + bi$; questi numeri assumono il nome di "**numeri complessi**".

Volendo introdurre, a questo punto, una simbologia possiamo dire che:

$\mathbb{N}$ indica l'insieme dei numeri naturali;
$\mathbb{Z}$ indica l'insieme dei numeri interi relativi;
$\mathbb{Q}$ indica l'insieme dei numeri razionali;
$\mathbb{R}$ indica l'insieme dei numeri reali;
$\mathbb{C}$ indica l'insieme dei numeri complessi.

2. PRODOTTO CARTESIANO

2.1) Nella figura 1 è rappresentata la pianta di parte di una città; ci sono tre strade parallele (via Bari, via Roma, via Asti) e tre strade perpendicolari alle prime (via Foggia, via Lecce, via Taranto).
Per individuare un incrocio si può usare una notazione del tipo (via Bari, vai Foggia). Tale scrittura si chiama coppia ordinata; il primo elemento che figura in essa, cioè via Bari, si chiama prima coordinata, il secondo elemento, cioè via Foggia, si chiama seconda coordinata. L'insieme delle coppie ordinate, la cui prima coordinata è un elemento dell'insieme A={via Bari, via Roma, via Asti} e la cui seconda coordinata è un elemento dell'insieme B={via Foggia, via Lecce, via Taranto} si

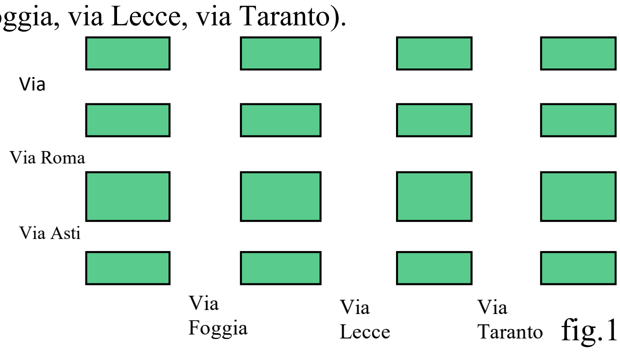


fig.1

chiama **<u>prodotto cartesiano</u>** di A e B e si indica con **AxB**. Cioè:

AxB={(via Bari,via Foggia);(via Bari,via Lecce);(via Bari,via Taranto);(via Roma,via Foggia);(via Roma, via Lecce); (via Roma, via Taranto); (via Asti, via Foggia); (via Asti, via Lecce); (via Asti, via Taranto) }.

2.2) In figura 2 è rappresentato un quadrato disegnato su carta quadrettata. Le righe di quadretti sono state numerate da 1 a 5 e le colonne di quadretti con le prime cinque lettere dell'alfabeto. Per individuare un riquadro del quadrato (come si fa nella battaglia navale) basta indicare la riga e la colonna a cui appartiene. Ad esempio il riquadro colorato di fig.2 è individuato dalla coppia ordinata (3,d). Se si pone: A={1,2,3,4,5} e B={a,b,c,d,e}risulta

AxB={(1,a);(1,b);(1,c);(2,a);…;(5,e)}

	a	b	c	d	e
1					
2					
3					
4					
5					

Fig.2

2.3) In figura 3 è rappresentato un altro quadrato, analogo a quello precedente, con la differenza che anche le colonne di quadretti sono numerate da 1 a 5. Anche in questo caso si può individuare un riquadro del quadrato mediante una coppia ordinata. Bisogna, però, preventivamente precisare quale coordinata indica la riga di quadretti e quale la colonna di quadretti.
Se si conviene, ad esempio, che la prima coordinata indica la riga dei quadretti e la seconda la colonna, si ha subito che la coppia (2,3) corrisponde al quadretto verde, mentre la coppia (5,2) individua il quadretto arancione.
Se si pone A={1,2,3,4,5} risulta ovviamente

AxB={(1,1); (1,2); (1,3); (1,4); …. ; (5,5)}.

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

Fig.3

Si osservi che le due coppie (2,3) e (3,2) sono diverse e non uguali. In generale due coppie (*a*,*b*) e (*c*,*d*) sono uguali se e solo se $a = c$ e $b = d$.
Dunque si può concludere che: dati due insiemi A e B, si dice prodotto cartesiano di A e B e si indica con **AxB**, l'insieme delle coppie ordinate (*a*,*b*) con $a \in A$ e $b \in B$.

$$\boldsymbol{AxB = \{(a,b)\ tali\ che\ a \in A\ e\ b \in B\}}$$

3. <u>RELAZIONI</u>

3.1) 5 ragazzi, che per brevità indichiamo con le lettere *a,b,c,d,e,* praticano alcuni dei seguenti sports: *calcio, tennis, nuoto, baseball*:
a pratica solo *calcio,*
b pratica solo *tennis,*
c pratica il *calcio* e il *tennis,*
d non pratica sport,
e pratica calcio e *nuoto,*
nessun ragazzo *pratica* il *baseball.*
Questa situazione può essere rappresentata con la figura 4 se si conviene che ciascuna freccia rappresenti la parola "*pratica*" e che, se una freccia parte ad esempio (come accade in figura) dal ragazzo a e termina al calcio, allora si debba intendere che il ragazzo *a pratica* il *calcio*.

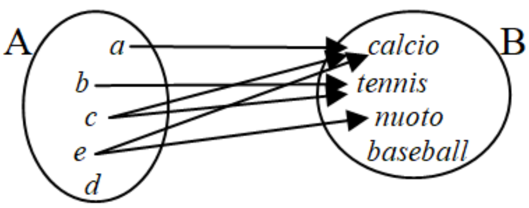


fig. 4

Ebbene la parola "*pratica*" si dice una "**relazione**" tra l'insieme dei ragazzi A={*a,b,c,d,e*} e l'insieme degli sports B={*calcio, tennis, nuoto, baseball*}. Se *a* è in relazione con lo sport *calcio* allora lo sport *calcio* si dice ***immagine*** di a, mentre *a* si dice ***controimmagine*** di *calcio.*

3.2) Si considerino i due insiemi numerici A={*3,4,5,6*} e B={*1,2,3,4,5,6,7,8,9,10*} e per ciascun numero appartenente ad A si trovino i numeri appartenenti a B di cui esso è divisore.
Si0 ha pertanto che.
3 è divisore di 3, 6, 9;
4 è divisore di 4 e 8;
5 è divisore di 5 e 10;
6 è divisore di 6;
Attribuendo alle frecce il significato "*è divisore di*", quanto sopra può essere rappresentato graficamente nel modo seguente

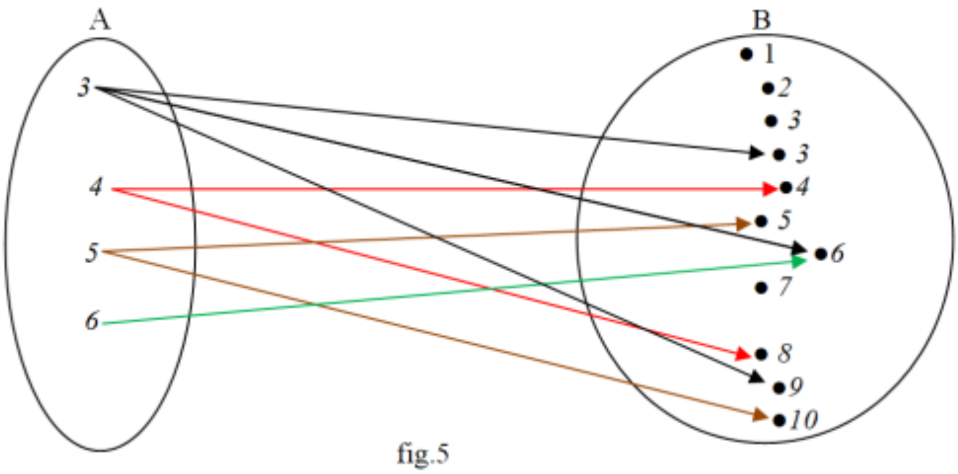


fig.5

Anche in questo caso la frase "*è divisore di*" si dice una relazione tra gli elementi dell'insieme A e gli elementi dell'insieme B.

3.3) Altri esempi di relazione sono:
"*é nato in*" tra un insieme di persone e l'insieme dei mesi dell'anno;
"*appartiene a*" tra un insieme di libri ed un insieme di alunni;
"*è il doppio di*" tra l'insieme $\mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{N}$;
"*è il quadrato*" tra elementi di $\mathbb{N}$ ed elementi di $\mathbb{Z}$;
"*è opposto*" tra elementi di $\mathbb{Z}$ ed elementi di $\mathbb{Z}$;
"*è parallela a*" tra rette di un piano e rette dello stesso piano;
"*è perpendicolare a*" tra rette di un piano e rette dello stesso piano;
"*è maggiore di*" tra elementi di Q ed elementi di Q;
E tanti altri esempi.
Si noti che quando si ha a che fare con una relazione fra elementi di un insieme ed elementi dello stesso insieme, come ad esempio la relazione "*è il doppio di*" fra elementi di N ed elementi di N, si preferisce parlare di relazione in N o di relazione tra elementi di N piuttosto che relazione tra elementi di N ed elementi di N.

3.4) Talvolta, quando si debba prendere ripetutamente in considerazione una relazione, si usa una lettera dell'alfabeto o un altro simbolo per indicare la relazione stessa.
Ad esempio, in luogo della frase "*è perpendicolare a*" si usa il simbolo $\perp$, in luogo di "*è parallela a*" si usa il simbolo $_{//}$, in luogo di "*è maggiore di*" (oppure "*è minore di*") si usa il simbolo > (<).
In ogni caso una relazione qualsiasi può essere indicata convenzionalmente con una lettera qualunque o con un qualunque simbolo, purché si precisi sempre (quando non si tratta di simboli usati da tutti) quale significato si intende attribuire al simbolo stesso.
Si può, ad esempio, decidere di usare la lettera $\mathcal{R}$ al posto delle parole "è il doppio di" e quindi, in luogo di scrivere "6 è il doppio di 3" si può scrivere, con l'uso del suddetto simbolo

$$\mathbf{6}\mathcal{R}\mathbf{3}$$

4. RELAZIONI E PRODOTTO CARTESIANO

Si riprenda in considerazione la relazione "*pratica*" rappresentata dalla fig.4. Se si indica con $\mathcal{R}$ tale relazione, se si usa cioè il simbolo $\mathcal{R}$ in luogo della parola "*pratica*", allora dalla figura 4 si ricava che $a\mathcal{R}calcio$, $b\mathcal{R}tennis$, e cosi via.
Un modo diverso per rappresentare questa stessa relazione è costituito dalla tabella di figura 6 nella quale sono stati anneriti i quadretti corrispondenti alle coppie

(*a*, *calcio*); (*b*, *tennis*); (*c*, *calcio*); (*c, tennis*); (*e, calcio*); (*e, nuoto*).

fig.6

$\mathcal{R}$	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
calcio	■		■		■
tennis		■	■		
nuoto					■
baseball					

Ciascuna delle coppie, come ad esempio la coppia (*a*, *calcio*), è costituita da due coordinate tali che scrivendo la prima davanti ad $\mathcal{R}$ e la seconda dopo $\mathcal{R}$, cioè, a$\mathcal{R}$*calcio*, si ottenga una proposizione vera.
Viceversa, non sono stati anneriti i quadretti corrispondenti a coppie, come ad esempio la coppia (*d, nuoto*), tali che scrivendo la prima coordinata davanti ad $\mathcal{R}$ e la seconda coordinata dopo $\mathcal{R}$, si ottenga una proposizione falsa. Per distinguere una proposizione vera da una falsa si può introdurre un simbolo di negazione quale per esempio

$$d \not\mathcal{R}\, nuoto$$

significando che non è vero che *d pratica* il *nuoto*.
Concludendo, la relazione $\mathcal{R}$ è perfettamente individuata dall'insieme dei quadretti neri della fig.6, insieme che a sua volta rappresenta un sottoinsieme del prodotto cartesiano

{*a,b,c,d,e*} x {*calcio, tennis, nuoto, baseball*}.

Dunque, una relazione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano: $\boldsymbol{\mathcal{R}} \subset$ **AxB**.

4.1 DOMINIO E CODOMINIO DI UNA RELAZIONE

Siano A e B due insiemi non vuoti. Sia $\mathcal{R}$ una relazione fra gli elementi di A e gli elementi di B. Non necessariamente tutti gli elementi di A sono in relazione con un qualche elemento di B.
Gli elementi di A che sono in relazione con un qualche elemento di B costituiscono un sottoinsieme di A. Questo sottoinsieme viene detto ***dominio*** della relazione, mentre gli elementi di B che sono immagini di un qualche elemento di A si dice ***codominio*** della relazione.

5. FUNZIONI

5.1) Si consideri un insieme di cinque persone che, per brevità, indichiamo con le lettere *a, b, c, d, e,* sia B l'insieme dei mesi dell'anno. Si ponga, dunque,

A = {*a, b, c, d, e*} e B = {*Gennaio, Febbraio,.., Novembre, Dicembre*}

e si indichi con Rla relazione "*è nato nel mese di*" fra gli elementi di A e gli elementi di B. Si rappresenti la suddetta relazione nel modo seguente:

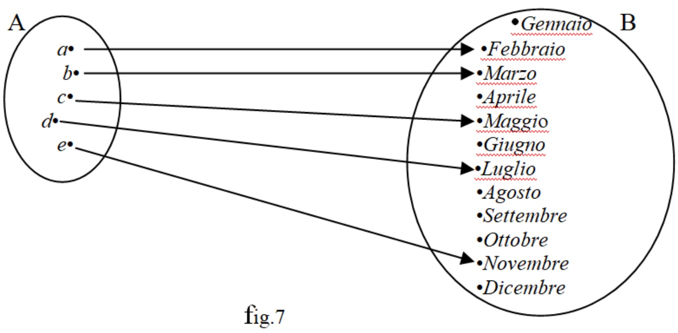


fig.7

Si prenda in considerazione l'insieme A da cui partono le frecce e si osservi che da **ogni elemento** di A parte una ed una sola freccia. Ebbene, in questo caso la relazione R prende il nome di ***funzione*** o ***applicazione*** o, più precisamente, funzione che va da A a B, e per indicare che la relazione R è una funzione da A a B si usa la scrittura

$$f : A \longrightarrow B,$$

sostituendo al simbolo $\mathcal{R}$ la lettera *f* (iniziale di funzione).
L'insieme A si chiama insieme di ***partenza*** o di ***definizione*** della funzione, l'insieme B si chiama insieme di ***arrivo*** della funzione o insieme in cui la funzione assume i suoi valori.

5.2) Altri esempi di funzioni sono:
- La relazione "*si trova in*" fra l'insieme {Bari, Roma, Taranto, Napoli, Milano} e l'insieme delle regioni italiane;
- La relazione "*ha per quadrato*" tra l'insieme {-2, -1, 0, 1, 2} e l'insieme {0, 1, 2, 3, 4};
- La relazione "*è il doppio di*" tra l'insieme {4, 6, 10, 12} e l'insieme {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}; e cosi via.

Esempi di relazioni che non sono funzioni sono:
- La relazione "*pratica*" introdotta all'inizio del paragrafo 3;
- La relazione "*è divisore di*" tra l'insieme {2, 3, 4, 5, 6} e l'insieme {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};
- La relazione "*si trova in*" tra l'insieme {Bari, Roma, Taranto, Napoli, Milano} e l'insieme {Puglia, Lazio, Campania, Sicilia}; e cosi via.

In tutti gli esempi precedenti, se si rappresentano le relazioni con le frecce, si vede immediatamente se esse sono funzioni o no.

5.3) Si ha spesso a che fare con relazioni fra insiemi non finiti e quindi non rappresentabili graficamente sul foglio come, ad esempio, la relazione "*ha per quadrato*" fra l'insieme $\mathbb{N}$ e se stesso. Conviene, allora, dare una definizione di funzione che non dipenda dalla rappresentazione grafica delle relazioni.

Definizione
Una relazione R fra gli elementi di un insieme A e gli elementi di un insieme B si chiama **funzione** che va da A a B, o anche **applicazione** che va da A a B se, per ogni elemento x appartenente ad A, esiste un unico elemento x' appartenente a B tale che sia xRx'.

Quando *x* è in relazione con *x'* in luogo della scrittura *x f x'* si usa la scrittura $f(x) = x'$. Come per le relazioni anche per le funzioni (che, non dimentichiamolo, sono delle relazioni particolari) l'elemento *x'* viene chiamato il corrispondente dell'elemento *x* o anche l'immagine di *x* per *f* o anche il valore assunto da *f* in *x*; mentre *x* si dice controimmagine di *x'*.
Ad esempio la funzione *f* "*ha per quadrato*" fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$ (vale a dire in $\mathbb{N}$) viene scritto nel modo seguente:

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

ed è tale che $f(2) = 4; f(3) = 9; f(0) = 0; f(1) = 1$ (infatti 2 ha per quadrato4, 3 ha per quadrato 9, 0 ha per quadrato 0 e 1 ha 1). Per assegnare una funzione di un insieme A in un insieme B basta assegnare ad ogni elemento di A (insieme di partenza) l'elemento corrispondente di B (insieme di arrivo) e ciò può essere fatto in più modi:

a) elencando in B i corrispondenti degli elementi di A (ovviamente ciò può essere fatto solo se A ha un numero finito di elementi);

Esempio: sia *f* la funzione di A = {1,2,3,4} in B = {1,2,3} nella quale:

a 1 corrisponde 1
a 2 corrisponde 1
a 3 corrisponde 2
a 4 corrisponde 2;

b) dicendo come si determina il corrispondente di ogni elemento di A cioè esplicitando la funzione (come per esempio "*ha per quadrato*").

Esempio: sia *f* una funzione di $\mathbb{Q}$ in sé nella quale ad ogni numero appartenente a $\mathbb{Q}$ corrisponde il numero che si ottiene da esso moltiplicandolo per 2 e addizionando 3 al prodotto ottenuto. Cioè se *x* è un numero di $\mathbb{Q}$, allora ad *x* deve corrispondere il numero 2x + 3. Volendo utilizzare una scrittura sintetica per rappresentare la funzione di cui sopra si scrive:

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \textit{ tale che per ogni } x \textit{ di } \mathbb{Q} \textit{ si ha } f(x) = 2x + 3$$

E' evidente che *2x + 3* è ancora un elemento di $\mathbb{Q}$.

Un altro esempio può essere il seguente:
Siano *r* ed *r'* due rette che si incontrano (oppure parallele), come in fig.8, e si indichi con *g* la funzione di *r* in *r'* nella quale ad ogni punto Q di *r* corrisponde il punto Q' di *r'* che si ottiene come intersezione tra la retta che congiunge Q con P e la retta r', dove P è un punto del piano individuato da *r* ed *r'* e non appartenente né ad *r* né ad *r'*.

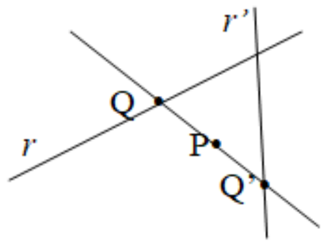


fig. 8

c) utilizzando, come già anticipato nella lettera precedente, una scrittura sintetica del tipo:

$$x \ \rightarrow \ 2x; \ \ a \rightarrow -a; \ \ b \rightarrow |b|; \ \ x \rightarrow 2^x; \ \ y \rightarrow \sqrt{y} + 2; \ \ x \rightarrow x^2 + 1; \ \ x \rightarrow x - 1$$

o di altro tipo per dare le istruzioni su come ottenere il corrispondente di un qualunque elemento dell'insieme di partenza (o di definizione che dir si voglia).

E' evidente che è del tutto indifferente usare una lettura al posto di un'altra, per indicare un elemento dell'insieme di definizione.

6. FUNZIONI RAZIONALI INTERE E FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

6.1) Si consideri un polinomio in una variabile *x*, ad esempio il polinomio:

$$2x + 1$$

Esso definisce una funzione $x \rightarrow 2x + 1$di $\mathbb{Q}$ in sé (o di $\mathbb{R}$ in sé) la quale si chiama **funzione polinomiale** o **funzione razionale intera**. Se si indica con *f* tale funzione si ha ad esempio:

$$f(1) = 3 \ ; f(0) = 1 \ ; f(-2) = -3$$

In generale ogni polinomio definisce una funzione polinomiale o una funzione razionale intera.

6.2) Analogamente, considerata una frazione di polinomi nella variabile *x*, ad esempio la funzione:

$$\frac{2x+1}{x-1}$$

ed osservato che la variabile indipendente x non può assumere il valore 1 perché in corrispondenza di tale valore il polinomio denominatore si annulla, detta frazione di polinomi definisce una funzione:

$$x \longrightarrow \frac{2x+1}{x-1}$$

dell'insieme dei numeri razionali diversi da 1 in Q (oppure dell'insieme dei numeri reali diversi da 1 in $\mathbb{R}$), la quale si chiama **funzione razionale fratta**. Indicata tale funzione con *g* si ha ad esempio:

$$g(0) = -1 \ ; g(2) = 5$$

In generale ogni frazione di polinomi definisce una funzione razionale fratta il cui insieme di partenza è costituito da tutti i numeri razionali (reali) diversi da quelli (se ci sono) per cui si annulla il denominatore e il cui insieme di arrivo è $\mathbb{Q}$ (o $\mathbb{R}$).

7. SUL SIMBOLISMO DI FUNZIONE

7.1) Si consideri l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ (si può considerare un qualsiasi insieme comunque), e sia *f* una funzione definita di $\mathbb{R}$ in sé. Cioè:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che per ogni *x* di $\mathbb{R}$ esiste uno ed un solo elemento *x'* di $\mathbb{R}$ per cui si abbia:

$$f(x) = x'$$

Ebbene l'elemento *x'* spesso viene indicato con la lettera *y,* e quindi: ***y = f(x)***

Una funzione, dunque, d'ora in avanti sarà indicata con la suddetta scrittura definendosi volta per volta il tipo di funzione e l'insieme su cui essa opera.

7.2) Non è male raccogliere qui quel minimo di simboli che comunemente vengono usati al fine di snellire ogni proposizione:
$\forall$ significa "per ogni"
$\exists$ significa "esiste"
$\nexists$ significa "non esiste"
$\exists!$ significa "esiste ed è unico"
$\in$ significa "elemento" (oppure "appartiene")
$\notin$ significa "non appartiene"
$\ni'$ significa "tale che"
: significa "risulta"
$\neq$ significa "diverso" (oppure "distinto")
$\equiv$ significa "coincidente".
A mò di esempio (non vi allarmate! però) la definizione di funzione così espressa a pag.6 può enunciarsi, utilizzando i simboli, nel modo seguente:

$$\boxed{\boldsymbol{f: A \rightarrow B, f\ funzione \Leftrightarrow \forall x \in A\ \exists!\ x' \in B \ni' x' = f(x)}}$$

e si legge ***"f è funzione di A in B se e solo se per ogni x elemento di A esiste uno ed un solo elemento x' di B tale che x' = f(x)"***. Dunque, il simbolismo è la stenografia del linguaggio matematico.

8. UGUAGLIANZA DI FUNZIONI

Si considerino le due funzioni f e g di Q in sé definita per x appartenete a Q rispettivamente:

$$f(x) = 2x + 2 \quad e \quad g(x) = 2(x + 1)$$

Le istruzioni che bisogna seguire per trovare il corrispondente di un qualunque numero nella funzione f sono chiaramente diverse dalle istruzioni che bisogna seguire per trovare il corrispondente di un qualunque numero nella funzione g (invero per trovare il corrispondente di un numero nella funzione f bisogna moltiplicarlo per 2 e addizionare il numero 2 al risultato, mentre per trovare il corrispondente di un numero nella funzione g bisogna addizionare 1 al numero e moltiplicare per due la somma ottenuta). Tuttavia, essendo

$$2x + 2 = 2(x + 1)$$

quale che sia il numero rappresentato da x, è evidente che, comunque si consideri un numero razionale, la sua immagine mediante f è uguale alla sua immagine mediante g. Quando accade ciò, come appunto in questo caso, le due funzioni si dicono uguali e si scrive:

$$\boldsymbol{f = g}$$

In generale, assegnate f e g aventi, si badi bene, lo stesso insieme di partenza A e lo stesso insieme di arrivo B, esse sono uguali se

$$\boldsymbol{\forall x \in A: f(x) = g(x).}$$

9. COMPOSIZIONE DI FUNZIONE (FUNZIONI COMPOSTE)

Si considerino la funzione

$$f: x \longrightarrow 2x$$

dell'insieme A = {0,1,2} nell'insieme B = {0,1,2,3,4,5}
e la funzione

$$g: y \longrightarrow y+1$$

dell'insieme B = {0,1,2,3,4,5} nell'insieme C = {0,1,2,3,4,5,6,7}.
Si noti che l'insieme di arrivo B della funzione f è uguale all'insieme di partenza (che è appunto lo stesso B)

della funzione *g*. Le due funzioni possono rappresentarsi graficamente così:

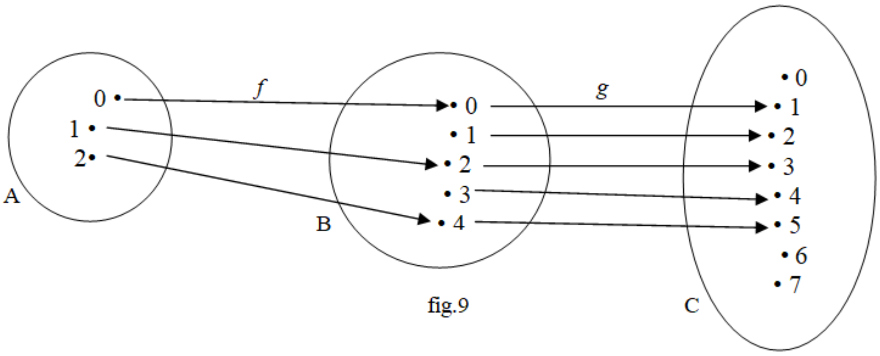


fig.9

A partire dalle due funzioni assegnate si può, in questo caso, definire una nuova funzione avente come insieme di partenza A = {0,1,2} e come insieme di arrivo C = {0,1,2,3,4,5,6,7}. Più precisamente si può definire una funzione di A in C facendo corrispondere ad ogni elemento di A l'elemento di C che si ottiene seguendo le frecce di fig.9. All'elemento 0 di A corrisponde l'elemento 1 di C; all'elemento 1 di A corrisponde l'elemento 3 di C; all'elemento 2 di A corrisponde l'elemento 5 di C. Questa nuova funzione, come si verifica subito, è rappresentato graficamente nel seguente modo:

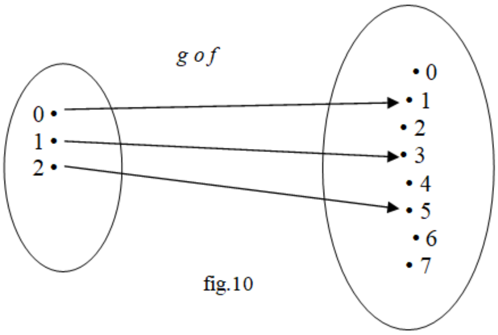


fig.10

Essa si dice ***funzione composta*** delle due funzioni assegnate e si indica con la scrittura ***g o f*** che si legge "***funzione composta di f e g***" o anche brevemente "***g cerchietto f***". Con la nuova scrittura risulta

$$(g \circ f)(0) = g\,[f\,(0)] = g\,(0) = 1,$$
$$(g \circ f)(1) = g\,[f\,(1)] = g\,(2) = 3,$$
$$(g \circ f)(2) = g\,[f\,(2)] = g\,(4) = 5.$$

Questo è il motivo per cui nella notazione di funzione composta di *f* e *g* si scrive prima (a sinistra) la funzione *g* (che opera per seconda) e poi (a destra) la funzione *f* (che opera per prima). In pratica esistono molte relazioni che sono funzioni composte.
Il filosofo inglese B. Russel (1872-1970), nella sua "*Introduzione alla filosofia matematica*" ne descrive molte.

Sia **l'ulteriore esempio**:
Si indichino con le tre lettere a, b, c tre persone e con a', b', c', i rispettivi padri e con a", b", c", le madri dei padri (cioè le nonne paterne di a,b,c). Si indichi con *f* la funzione che fa corrispondere a ciascuna persona il relativo padre, e con *g* la funzione che fa corrispondere a ciascun padre la relativa madre. Allora la funzione composta *g o f* fa corrispondere a ciascuna persona la madre del relativo padre, ossia la nonna paterna. Si osservi che *f* è la funzione "ha per padre" e *g* è la funzione "ha per madre" e *g o f* è la funzione "ha per nonna", che poi non è altro che la funzione "ha per madre del padre".
In generale si dà la seguente **definizione di funzione composta**.

Definizione
Siano $f: A \to A'$ e $g: A' \to A''$ due funzioni (tali che l'insieme di arrivo della prima sia uguale all'insieme di partenza della seconda), si chiama funzione composta di f e g, e si indica con $\boldsymbol{g\ o\ f}$, la funzione di A in A" cioè $g\ o\ f\ : A \to A''$, la quale fa corrispondere ad ogni elemento x di A l'elemento $(g\ o\ f)\ (x)$ di A'', cioè l'elemento che si ottiene trovando prima il corrispondente $f(x)$ di x in A' e poi il corrispondente $g(f(x))$ di $f(x)$ in A".

E'importante osservare che la legge di composizione "cerchietto" fra funzioni non gode della proprietà commutativa: cioè, in generale, si ha

$$g\ o\ f \neq f\ o\ g$$

10. FUNZIONI INGETTIVE, SURGETTIVE, BIGETTIVE

Si è visto che, per stabilire se una relazione $\mathcal{R}$ tra elementi di un insieme A e di un insieme B è una funzione, bisogna prendere in esame soltanto l'insieme di partenza A e vedere se nella rappresentazione grafica della relazione mediante frecce, da ogni punto di A parta una ed una sola freccia.

10.1) Siano ora alcune funzioni rappresentate graficamente:

a) la funzione $f: x \longrightarrow -x$ di { -2, 1, 0, 1, 2} in {-2, -1, 0, 1, 2} (fig.11)

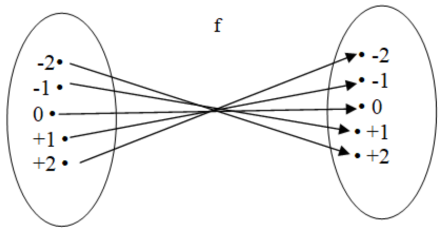


fig.11

b) la funzione $g: x \to 2x$ di {0, 1, 2, 3} in {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} (fig.12)

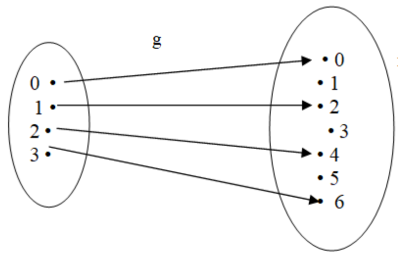


fig.12

c) la funzione $h{:}x \longrightarrow |x|$ di { -2, -1, 0, 1, 2} in {0, 1, 2} (fig.13)

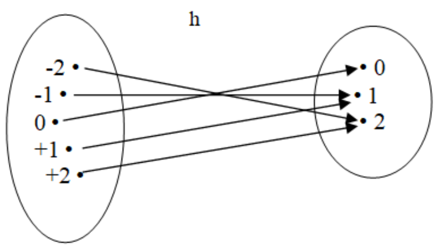


fig.13

E si prendano in esame gli insiemi di arrivo delle varie funzioni considerate. Si nota che in ogni elemento dell'insieme di arrivo di f (fig.11) e in ogni elemento dell'insieme di arrivo di g (fig.12) non arriva mai più di una freccia, nel senso che in ogni elemento dell'insieme di arrivo arriva una sola freccia o non ne arriva nessuna (arriva ***al più*** una freccia); le due funzioni f e g si dicono allora ***ingettive*** (o *iniettive*). Più in generale si dà la seguente

Definizione
$f: A \to B$ è ingettiva se e solo se per ogni x' є B esiste al più un x є A tale che $f(x) = x'$

Altri esempi di funzioni ingettive sono:
- la funzione $x \to 3x$ di N in sé;
- la funzione $x \to -x$ di Z in sé;
- la funzione $x \to x + 1$ di N in sé.

Si osserva facilmente che una funzione $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ è ingettiva se e solo se ad elementi distinti dell'insieme di partenza corrispondono elementi distinti nell'insieme di arrivo. Cioè simbolicamente:

$$\boldsymbol{x, y \in A, x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)\ con\ f(x), f(y) \in B.}$$

Si esaminino ora gli insiemi di arrivo delle funzioni *f* (fig.11) e *h* (fig.13). Si vede che in ogni elemento dell'insieme di arrivo di *f* ed in ogni elemento dell'insieme di arrivo di *h* arriva ***almeno*** una freccia. Le due funzioni *f* e *h* si dicono allora ***surgettive*** (o *suriettive*)**.** Quindi la definizione in generale:

Definizione
***f*: *A* → *B* surgettiva se e solo se per ogni x'є B esiste x є A tale che f(x) = x'**

Altri esempi di funzioni surgettive sono:
la funzione $x \longrightarrow |x|$ di Z in ℕ;
la funzione $x \longrightarrow -x$ di Z in sé;
la funzione $x \longrightarrow x+1$ di ℚ in sé.
Concludendo possiamo dire che in una funzione ingettiva, in ogni elemento dell'insieme di arrivo arriva **al più** una freccia; mentre in ogni funzione surgettiva, in ogni elemento dell'insieme di arrivo arriva **almeno** una freccia.

10.2) Una funzione che è contemporaneamente ingettiva e surgettiva si dice ***bigettiva.***
Si noti che la funzione *f* considerata in a) di 10.2) di pag. 10 (fig.11), è ingettiva e surgettiva e quindi bigettiva. Inoltre una funzione bigettiva, per quanto detto più sopra, in ogni elemento del suo insieme di arrivo giunge **una ed una sola freccia.**
Altri esempi di funzioni bigettive sono:
- la funzione $x \to -x$ di ℤ in sé;
- la funzione $x \to 3x$di ℚ in sé.

Infine una bigezione di un insieme in sé si dice anche una ***trasformazione*** di quell'insieme.

11. FUNZIONE INVERSA

Si consideri una funzione *f* bigettiva, ad esempio la funzione "*ha per capitale*" nell'insieme {Italia, Spagna, Francia, Grecia} nell'insieme {Parigi, Roma, Atene, Madrid}, funzione rappresentata graficamente (fig.14):

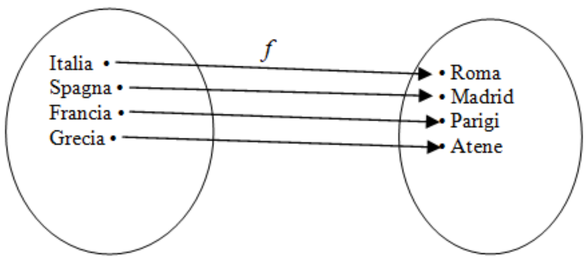


fig.14

Se si invertono le frecce in fig.14 si ottiene l'altra rappresentazione grafica (fig.15)

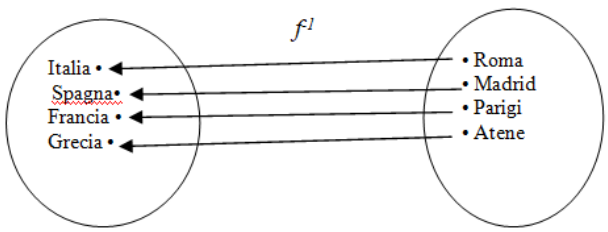


fig.15

che rappresenta ancora una funzione e precisamente la funzione "*è capitale di*" dell'insieme {Roma, Madrid, Parigi, Atene} nell'insieme {Italia, Spagna, Francia, Grecia}.

La nuova funzione così ottenuta dicesi ***inversa*** di quella iniziale e viene indicata, appunto, con $\mathbf{f^{-1}}$.
Appare superfluo far notare che la funzione inversa dell'inversa, cioè $(f^{1})^{-1}$, è proprio f:$(f^{1})^{-1} = f$.
Inoltre si osservi pure che la composta fra f e la sua inversa, cioè

$$f^{1} o\, f,$$

operando su un elemento dell'insieme di partenza lo lascia invariato.
Infatti supposto $f: A \to A'$e quindi $f^{-1}: A' \to A$per cui$f^{-1} o f: A \to A$,

preso $x \in A$: $f^{1} o\, f\,(x) = f^{1}(f(x)) = x$.

Nell'esempio della funzione "*ha per capitale*"
dell'insieme {Italia, Spagna, Francia, Grecia} nell'insieme {Roma, Madrid, Parigi, Atene}
e della sua inversa "*è capitale di*" dell'insieme {Roma, Madrid, Parigi, Atene} nell'insieme {Italia, Spagna, Francia, Grecia} si ha:

$$\boldsymbol{f^{1} o\, f\,(\text{Italia}) = f^{1}(f\,(\text{Italia})) = f^{1}(\text{Roma}) = \text{Italia}}$$

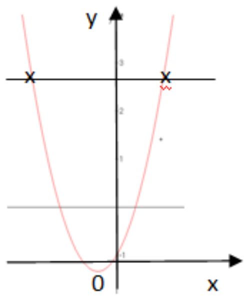
$$\boldsymbol{f^{1} o\, f\,(\text{Spagna}) = f^{1}(f\,(\text{Spagna})) = f^{1}(\text{Madrid}) = \text{Spagna.}}$$

La funzione composta tra una funzione f e la sua inversa f^{1}, cioè $f^{1} o\, f$, dicesi ***bigezione identica*** e si indica con $\mathbf{I_A}$ (nel caso in cui l'insieme in cui opera è A). Cioè:

$$\boldsymbol{f^{1} o\, f = \mathrm{I}_A}$$

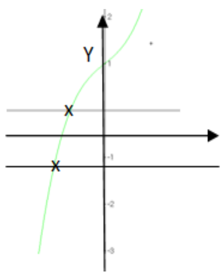
Qualche considerazione sulle funzioni e i loro grafici.

- Una funzione f può ammettere l'inversa f^{1}. Siamo sicuri che una funzione f ammette inversa f^{1} se e solo se essa è bigettiva. Per sapere se una funzione è bigettiva, deve accadere che una qualsiasiretta parallela all'asse delle x intersechi il suo grafico in un sol punto.



la retta interseca il grafico in due punti, dunque la funzione non è bigettiva

fig.16

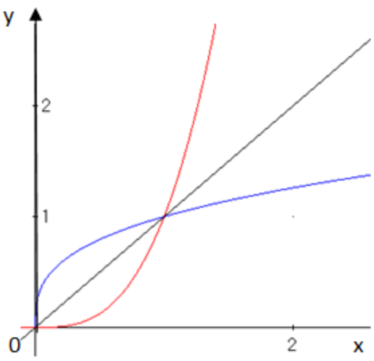


ciascuna retta interseca il grafico in un sol punto, dunque
la funzione è bigettiva

fig.17

- Inoltre, una funzione f e la sua inversa f^{-1} hanno grafici che sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (vedi figura 18).

fig.18



12. SCALA CELSIUS E SCALA FERENHEIT

La retta è rappresentata da una funzione lineare del tipo $y = mx + q$.
Un classico esempio applicativo di cioè la relazione tra la scala della temperatura Celsius (così chiamata dal nome dell'astronomo svedese Anders Celsius, 1701-1744, che la propose per la prima volta nel 1742) e la scala della temperatura Ferenheit (così chiamata in onore del fisico tedesco Daniel Gabriel Fahrenheit, 1686-1736, che la propose nel 1724).
La scala Celsius assegna la temperatura di 0 gradi per il punto di congelamento dell'acqua e di 100 gradi per il punto di ebollizione della stessa.
La scala Fertenheit assegna la temperatura di 32 gradi per il punto di congelamento dell'acqua e di 212 gradi per il punto di ebollizione della stessa.

Se x è la misura della temperatura in gradi centigradi (scala Celsius) e y è la misura della stessa temperatura in gradi Ferenheit, allora si ha tra x e y un legame del tipo

$$y = mx + q \qquad (1)$$

Dove i valori di m e q sono tali che siano

$$f(0) = 32 \text{ } e \text{ } f(100) = 212$$

Facendo i calcoli:

$$32 = q$$

$$212 = 100m + 32 \text{ da cui } m = \frac{212-32}{100} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$$

Pertanto la (1) si scrive

$$y = \frac{9}{5}x + 32 \qquad (2)$$

Mentre la funzione inversa è

$$x = f^{-1}(y) = \frac{5}{9}(y - 32) \qquad (3)$$

Esempio

- 40 gradi Celsius equivalgono a
$$y = \frac{9}{5}x + 32 = \frac{9}{5} \cdot 40 + 32 = 72 + 32 = 104 \text{ gradi Ferenheit}$$
- 122 gradi Ferenheit equivalgono a
$$x = \frac{5}{9} \cdot (122 - 32) = \frac{5}{9} \cdot 90 = 50 \text{ gradi Celsius.}$$