Il numero esisteva ancor prima che l'uomo comparisse sulla terra. Le sue proprietà, ogni tanto, si svelano all'uomo matematico con pigrizia e avarizia (per consentire a qualcuno di conseguire il premio **Wolf** o la medaglia **Fields**, sorta di Nobel della matematica).

FUNZIONE ZETA DI RIEMANN (1826-1866)

Definiamo la funzione

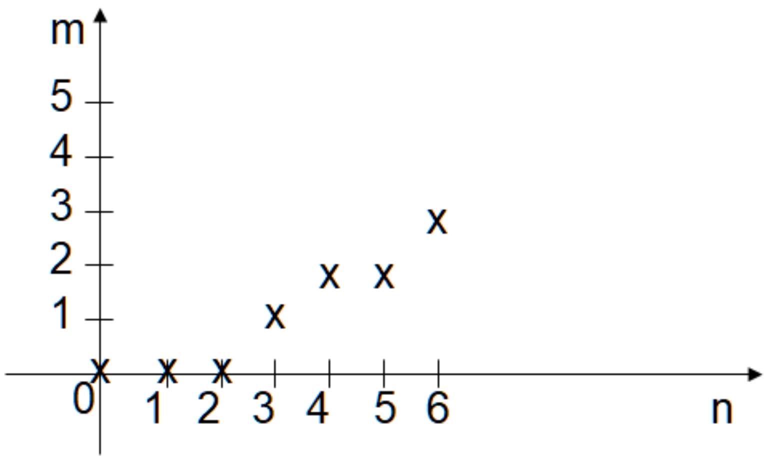
$$\pi(n) : n \to m$$

Con $n \in \mathbb{N}$ ed m è il numero dei primi minori di n.

Esempio: $\pi(5) = 2$

Perché due sono i numeri primi **minori** di 5 e questi sono 2 e 3. Si vedano altri esempi nella figura sotto

$\pi(0) = 0$
$\pi(1) = 0$
$\pi(2) = 0$
$\pi(3) = 1$
$\pi(4) = 2$
$\pi(5) = 2$
$\pi(6) = 3$



Dal disegno si vede che il grafico di questa funzione è discreto (cioè la funzione non è continua).
Gauss (1777-1855) studiò la funzione $\pi(x)$ con $x \in \mathbb{R}$ nel tentativo di estrarre dalla discretezza di $\pi(n)$ una funzione continua.
La funzione $\pi(x)$ con $x \in \mathbb{R}$, invece di $n \in \mathbb{N}$, è stata chiamata **funzione zeta** ed indicata col simbolo **z(x).**
Il matematico Adrien Legendre (1752-1853), nel 1798 congetturò che, per x sufficientemente grande,

$$z(x) = \frac{x}{A \log(x) + B}$$

dove A e B sono costanti da determinare.
Successivamente, nel 1808, Legendre affermò che è possibile trovare, con soddisfacente approssimazione, che fra 1 e un certo numero limite x, ci sono y numeri primi e precisamente

$$y = \frac{x}{\log(x) - 1{,}08366}$$

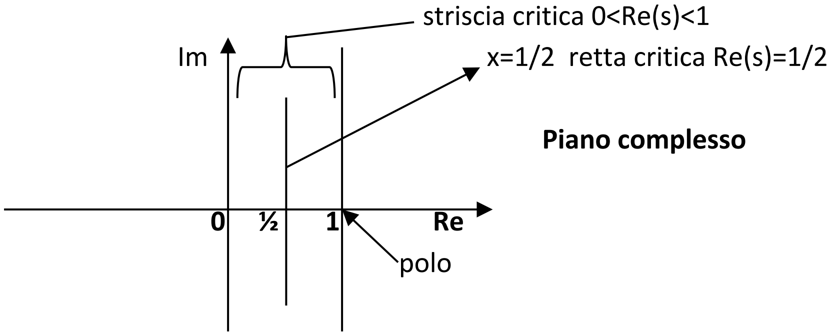
dove B=1,08366 fu trovato con il metodo dei minimi quadrati, di cui Legendre fu uno degli inventori.
B. Riemann (1826-1866) si spinse oltre e pose il problema per **s complesso**. Cioè la funzione z(s) con **s=a+bi** numero complesso. Questa funzione è stata chiamata **funzione zeta di Riemann** e indicata col simbolo

$$\zeta(s)$$

(ζ lettera greca «zeta»)
Riemann affermò (di qui la **CONGETTURA di RIEMANN,** tuttora non dimostrata) che l'equazione

$$\zeta(s) = 0$$

con s=a+bi, ha gli zeri complessi non banali con la parte reale a sempre uguale ad 1/2. In altre parole, nel piano complesso gli zeri non banali della funzione zeta si trovano sulla retta di equazione x=1/2 parallela all'asse delle y. La retta x=1/2 si dice ***critica***.



La parte del piano complesso compresa tra 0 e 1 è detta ***striscia critica***.

L'OPERA DI BERNHARD RIEMANN

Una fase di notevole importanza nello studio della funzione z è associata agli studi di Riemann, il quale propose (1859) di definire tale funzione per $x \in \mathbf{C}$ e si occupò del prolungamento analitico di z all' intero piano complesso.

Sia, dunque, z(x) la funzione zeta con x numero complesso cioè del tipo x=a+bi.

Gli zeri della funzione z così prolungata (z ammette un polo per *z* = 1) sono:

- *x* = -2, *x* = -4, *x* = -6, ... detti *zeri banali* di z;
- alcuni numeri complessi (non reali) *x*, con parte reale Re

$$0 \leq Re \leq 1$$

Riemann suppose che *tutti gli zeri non banali* di z siano caratterizzati dalla proprietà di avere parte reale Re(*x*)=½. La congettura indicata da Riemann non è ancora stata provata né smentita; nel 1914, G.H. Hardy (1877-1947) giunse a dimostrare che z ha infiniti zeri non banali per i quali risulta verificata la supposizione Riemanniana.

Essendo la congettura di Riemann collegata alla serie dei numeri primi dalla formula di Eulero (funzione zeta di Eulero con x numero reale), e alle formule per il calcolo del numero di numeri primi, alcuni pensano che un'eventuale dimostrazione di questa congettura potrebbe aprire la strada alla scoperta di nuovi più efficienti metodi per fattorizzare un numero nei suoi fattori primi, e quindi minare le fondamenta del cifrario RSA.

Una rappresentazione della funzione zeta di Riemann è

$$\zeta(\mathrm{x}) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \ldots.. \qquad (1)$$

dove x è un numero complesso. Mentre per x numero reale la funzione (1) è detta di Eulero e indicata z(x).

Alcuni valori della funzione zeta:

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \qquad (2)$$

$$\zeta(4) = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90} \qquad (3)$$

Nella rappresentazione

$$\zeta(\mathrm{x}) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \ldots..$$

appaiono al denominatore potenze dei numeri naturali. Ebbene, la stessa funzione $\zeta(x)$ può essere rappresentata sotto forma di prodotto dove appaiono solo numeri primi

$$\zeta(x) = \frac{2^x}{2^x - 1} \cdot \frac{3^x}{3^x - 1} \cdot \frac{5^x}{5^x - 1} \cdot \frac{7^x}{7^x - 1} \cdot \frac{11^x}{11^x - 1} \cdots \qquad (4)$$

Di qui il legame stretto tra la funzione zeta di Riemann e i numeri primi.
Intanto osservo che

$$\frac{2^x}{2^x - 1} = \frac{1}{\frac{2^x - 1}{2^x}} = \frac{1}{\frac{2^x}{2^x} - \frac{1}{2^x}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^x}} = \frac{1}{1 - 2^{-x}}$$

e cosi per tutte le altre frazioni.
Quindi, in generale si può scrivere

$$\zeta(x) = \prod_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - p^{-x}}\right) \qquad (5)$$

dove p è un numero primo e x, non dimentichiamolo, è un numero complesso; il simbolo di pi greco maiuscolo Π indica una produttoria, come il sigma maiuscolo Σ una sommatoria.

Vediamo una dimostrazione, partendo dalla rappresentazione

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots$$

Moltiplichiamo ambo i membri per $(1 - 2^{-x})$

$$(1 - 2^{-x})\zeta(x) = (1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots)(1 - 2^{-x})$$

Svolgiamo i calcoli

$$(1 - 2^{-x})\zeta(x) = \left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots\right)(1) - \left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots\right)(2^{-x})$$

Si ha

$$(1 - 2^{-x})\zeta(x) = \left(1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{6^x} + \cdots\right) = (1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \cdots)$$

In questa espressione tutte le frazioni con denominatore un numero pari sono scomparse.
Quello che vogliamo ora è fare scomparire tutte le frazioni. Continuiamo moltiplicando ambo i membri per $(1 - 3^{-x})$:

$$(1 - 3^{-x})(1 - 2^{-x})\zeta(x) = \left(1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} + \cdots\right)(1 - 3^{-x}) =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{9^x} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{3^x} + \frac{1}{9^x} + \frac{1}{15^x} + \frac{1}{21^x} + \cdots\right) = \left(1 + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{7^x} + \frac{1}{11^x} + \cdots\right)$$

Poi si moltiplicano ambo i membri per $(1 - 5^{-x})$ e poi per $(1 - 7^{-x})$ e cosi via. In tal modo scompaiono tutte le frazioni che hanno multipli di 2, di 3, di 5 eccetera. Rimangono solo i numeri primi fra i fattori del primo membro, mentre al secondo membro tutte le frazioni sono state eliminate e rimane solo il numero 1

$$\ldots.(1 - 7^{-x})(1 - 5^{-x})(1 - 3^{-x})(1 - 2^{-x})\zeta(x) = 1$$

Quindi $\zeta(x) = \frac{1}{\ldots(1-7^{-x})(1-5^{-x})(1-3^{-x})(1-2^{-x})} = \frac{1}{(1-2^{-x})} \cdot \frac{1}{(1-3^{-x})} \cdot \frac{1}{(1-5^{-x})} \cdot \frac{1}{(1-7^{-x})} \cdots = \prod_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1-p^{-x}}\right)$

Cioè

$$\zeta(x) = \prod_{p=1}^{+\infty} (\frac{1}{1-p^{-x}})$$

Che equivale a

$$\zeta(\mathrm{x}) = \frac{2^x}{2^x-1} \cdot \frac{3^x}{3^x-1} \cdot \frac{5^x}{5^x-1} \cdot \frac{7^x}{7^x-1} \cdot \frac{11^x}{11^x-1} \cdots$$

essendo $\frac{1}{(1-2^{-x})} \cdot \frac{1}{(1-3^{-x})} \cdot \frac{1}{(1-5^{-x})} \cdot \frac{1}{(1-7^{-x})} \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{5^x}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{7^x}} \cdots = \frac{1}{\frac{2^x-1}{2^x}} \cdot \frac{1}{\frac{3^x-1}{3^x}} \cdot \frac{1}{\frac{5^x-1}{5^x}} \cdot \frac{1}{\frac{7^x-1}{7^x}} \cdots =$

$$= \frac{2^x}{2^x-1} \cdot \frac{3^x}{3^x-1} \cdot \frac{5^x}{5^x-1} \cdot \frac{7^x}{7^x-1} \cdot \frac{11^x}{11^x-1} \cdots$$

La dimostrazione è stata suggerita dallo studente universitario di calcolo e probabilità Mihailis Boulasikis, riportata nel sito https://it.quora.com

Grafico tridimensionale della funzione zeta