FUNZIONI RECIPROCHE E INVERSE DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI. GRAFICI

A) Le funzioni $y = sen(x)$ e la sua reciproca $y = \frac{1}{sen(x)}$. Entrambe hanno periodo $T = 2\pi$.

$$sen(x): \mathbb{R} \to [-1,1]$$
$$\frac{1}{sen(x)}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} -]-1,1[$$

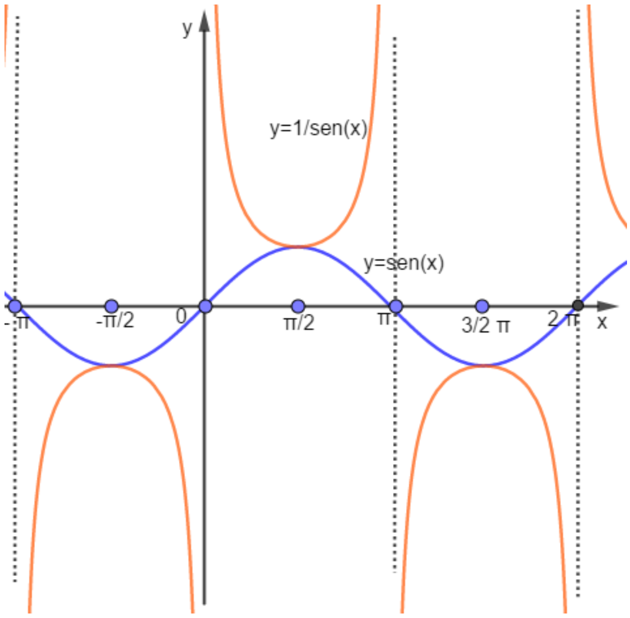


grafico di $y = sen(x)$ e la sua reciproca $y = \frac{1}{sen(x)}$

Funzione inversa del seno.

La funzione inversa di $y = sen(x)$ è $y = arcsen(x)$ che ha come dominio $[-1\ 1]$ e come codominio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.L' **arcoseno** è una delle "possibili funzioni inverse" di $sen(x)$ definita nel modo seguente

$$arcsen(x): [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

In altre parole, $\theta = arcsen(x)$ è quell'angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ tale che $x = sen(\theta)$. L'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ è stato scelto in modo che l'angolo θ il cui seno sia x sia unico. Infatti in tale intervallo la funzione

è bigettiva (vedi il grafico a destra).

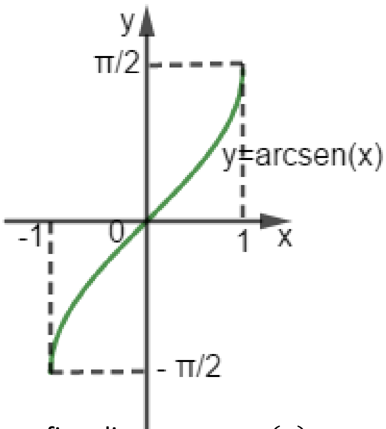


grafico di $y = arcsen(x)$

B) Le funzioni $y = cos(x)$ e la sua reciproca $y = \frac{1}{cos(x)}$. Entrambe hanno periodo $T = 2\pi$.

$cos(x): \mathbb{R} \to [-1,1]$
$\frac{1}{cos(x)}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} -]-1,1[$

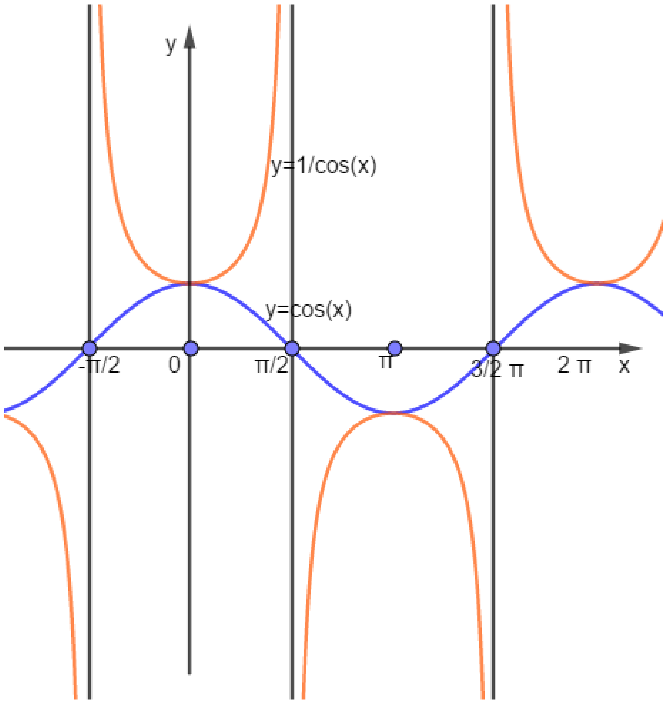


grafico di $y = cos(x)$ e la sua reciproca $y = \frac{1}{cos(x)}$

Funzione inversa del coseno.
La funzione inversa di $y = cos(x)$ è $y = arcos(x)$ che ha come dominio $[-1\ 1]$ e come codominio

$[0, \pi]$. L'**arcocoseno** è la funzione definita nel modo seguente

$$arcos(x): [-1\ 1] \to [0, \pi]$$

In altre parole, $\theta = arcosen(x)$ è quell'angolo compreso tra $0\ e\ \pi$ tale che $x = cos(\theta)$. L'intervallo $[0, \pi]$ è uno dei tanti possibili ed è stato scelto in modo che l'angolo θ il cui coseno sia x sia unico.
Infatti in tale intervallo la funzione è bigettiva (vedi grafico a destra).

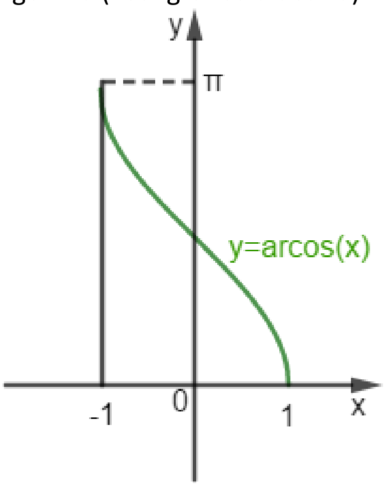


grafico di $y = arcos(x)$

C) Le funzioni $y = tan(x)$ e la sua reciproca $y = \frac{1}{tan(x)}$. Il periodo di entrambe è $T = \pi$. Il dominio e il codominio di entrambe è tutto $\mathbb{R}$.

$$tan(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\frac{1}{tan(x)}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

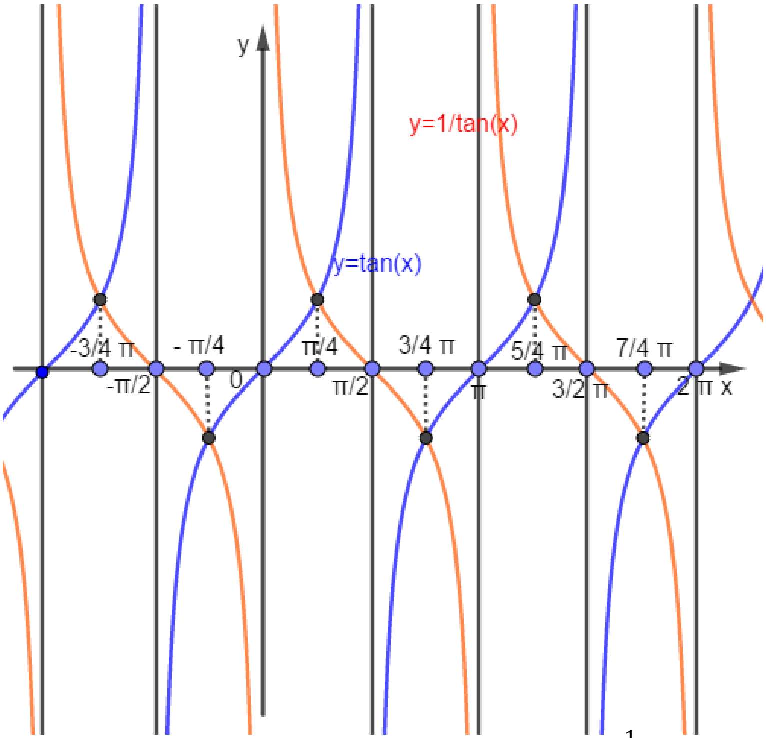


grafico di $y = tan(x)$ e la sua reciproca $y = \frac{1}{tan(x)}$

Funzione inversa della tangente.

La funzione inversa di $y = tan(x)$ è $y = arctan(x)$. Ha come dominio tutto $\mathbb{R}$ e come codominio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

L'arcotangente è la funzione cosi definita

$$arctan(x): \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

in modo che $\theta = arctan(x)$ è quell'angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ per cui $x = \tan(\theta)$.

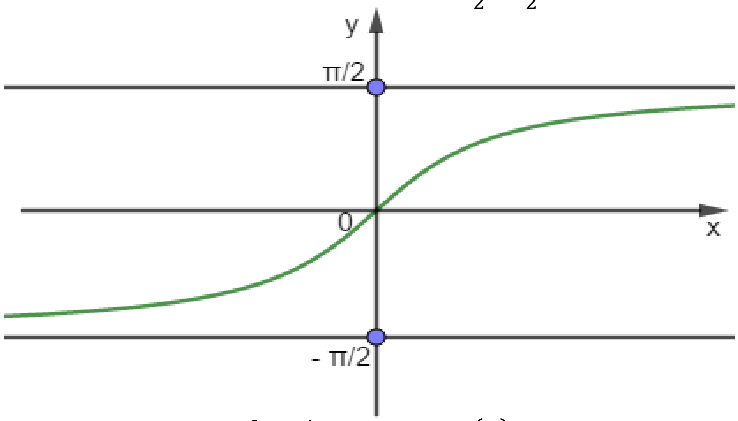


grafico di $y = arctan(x)$

D) Le funzioni $y = cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ $e\ la\ sua\ reciproca\ y = \frac{1}{cotan(x)} = tan(x)$ sono state analizzate nel punto precedente C).

E) Le funzioni $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ $e\ la\ sua\ reciproca\ y = \frac{1}{\sec(x)} = \cos(x)$ sono state analizzate nel punto precedente B).

F) Le funzioni $\text{cosec}(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$ $e\ la\ sua\ reciproca\ y = \frac{1}{\text{cosec}(x)} = sen(x)$ sono state analizzate nel punto precedente A).

G) Funzione inversa della cotangente.

La funzione inversa di $y = cotan(x)$ è $y = arccotan(x)$. Ha come dominio tutto $\mathbb{R}$ e codominio $]0, \pi[$

L'arcocotangente è la funzione cosi definita

$$arccotan(x): \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$$

per la quale $\theta = arccotan(x)$ è quell'angolo compreso tra 0 e π che soddisfa l'uguaglianza $x = cotan(\theta)$.

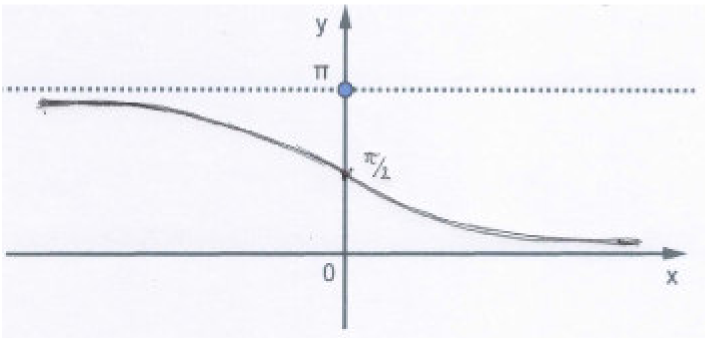
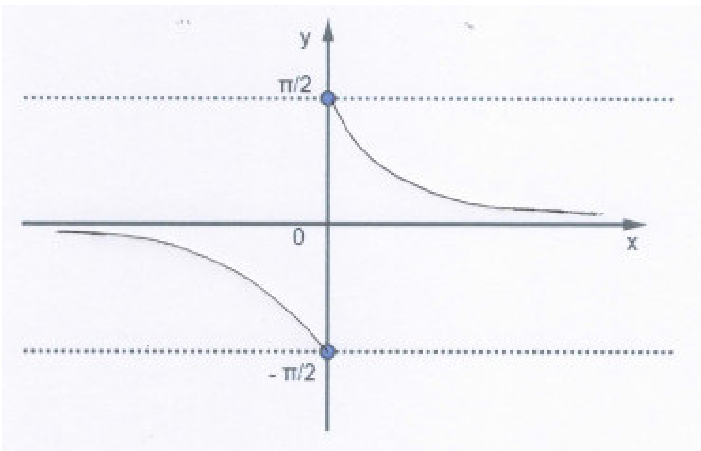


grafico dell'arcocotangente

Per l'arcocotangente si ricorre anche ad un'altra definizioni secondo la quale la funzione y=arccotan(x) ha come codominio $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ invece di $]0, \pi[$.

$$arccotan(x): \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$



altro grafico dell'arcocotangente

Dai grafici si evince che le due definizioni sono diverse:

- nel primo caso y=arccot(x) è continua e derivabile, e nel secondo caso no;
- nel primo caso per y=arccot(x) si ha l'uguaglianza

$$arctan(x) + arccotan(x) = \frac{\pi}{2}$$

- nel secondo caso vale l'uguaglianza

$$arccotan(x) = arctan\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right), \quad \text{con } x \neq 0.$$

Si può ricorrere alla prima definizione o alla seconda; ciò dipende dal tipo di esercizio da affrontare. E' bene sottolineare che la scelta del codominio è importante.

H) Le funzioni goniometriche inverse sono legate da relazioni. Per esempio:

$$arcsen(x) + arcos(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$arctan(x) + arctan\left(\frac{1}{\mathrm{x}}\right) = sgn(x) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$sen\big(arcos(x)\big) = \cos(arcsen\,(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$cotan\big(arcos(x)\big) = tan(\mathrm{arcsen}\,(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$cotan\big(arcsen(x)\big) = tan(arcos\,(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$sen(\mathrm{arctan}\,(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$cos(\mathrm{arctan}\,(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Dove *sgn(x)* vale 1 se x>0, oppure -1 se x<0.