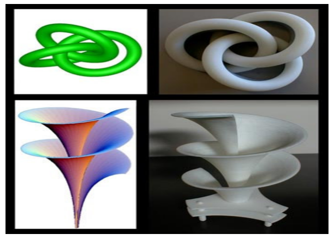
# INVERSIONI DI FIGURE



## Una trasformazione geometrica non ``elementare''

Le prime trasformazioni geometriche che si incontrano a scuola sono quelle che spostano una figura senza modificare le distanze tra i suoi punti.

Esse sono le trasformazioni della geometria di Euclide
e si chiamano movimenti rigidi (della retta, del piano e dello spazio):

**Due figure sono uguali o congruenti se esiste un movimento rigido che le sovrappone.**

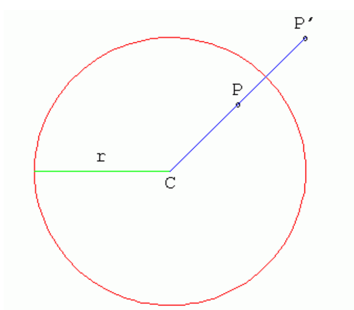
Vengono poi le similitudini.
Queste, pur alterando le distanze, ne conservano però i rapporti, e quindi non cambiano la forma delle figure.

## Inversioni

**Una *inversione* di una figura rispetto ad una circonferenza è una trasformazione meno rigida, nel senso che conserva gli angoli ma modifica sia le distanze tra i punti sia i rapporti tra queste. Ecco come l'inversione funziona.**

1. **Tracciamo una circonferenza nel piano di centro C e raggio r. Se P è un punto distinto da C, il suo inverso P' è il punto allineato con C e con P e tale che:**

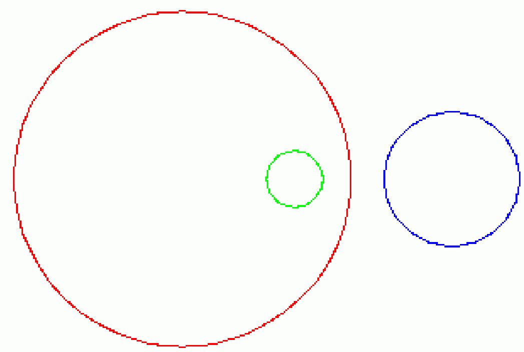
   **distanza tra C e P) x (distanza tra C e P') = $r^2$**




**Inversione circolare nel piano**

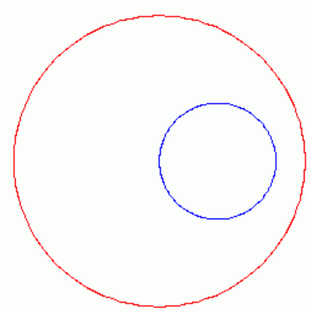
**Si può verificare facilmente che una inversione rispetto ad una circonferenza trasforma ogni punto interno, diverso da C, in un punto esterno, e viceversa, mentre i punti della circonferenza restano fissi. Meno semplice è immaginare com' è fatta l'inversa di una curva qualunque.**

2. **Una circonferenza generica (in verde) interna a quella rispetto alla quale si costruisce l'inversione si trasforma in una circonferenza esterna (in blu).**



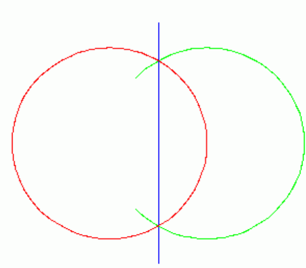
*Una circonferenza (in blu)*
*e la sua curva inversa (in verde)*

3. **Se però la circonferenza passa per il centro di inversione (in blu), si trova che la sua inversa è una retta (in verde).**



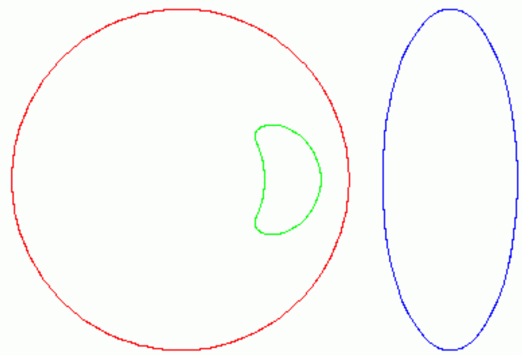
*Una circonferenza per il centro (in blu)*
*e la sua curva inversa (in verde)**

4. **Inversione di un segmento**



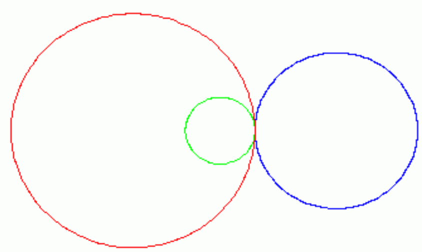
*Un segmento (in blu)*
*e la sua curva inversa (in verde)*

5. **Inversione di una ellisse**



*Un'ellisse (in blu) e la sua curva inversa (in verde)*

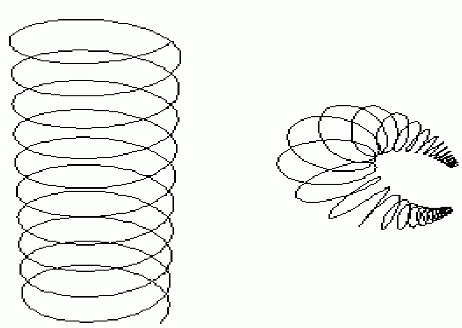
6. **Inversione di una circonferenza tangente (alla circonferenza in rosso)**



*Una circonferenza (in blu)*
*e la sua curva inversa (in verde)*

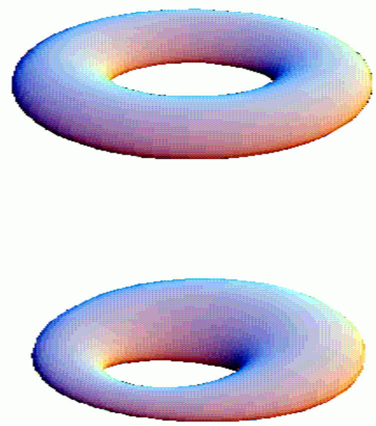
**E l'inversa di una curva, o più in generale di una superficie, rispetto ad una sfera nello spazio?**

7. **La sfera di inversione non compare; essa non interseca l'elica cilindrica ma contiene la sua inversa.**



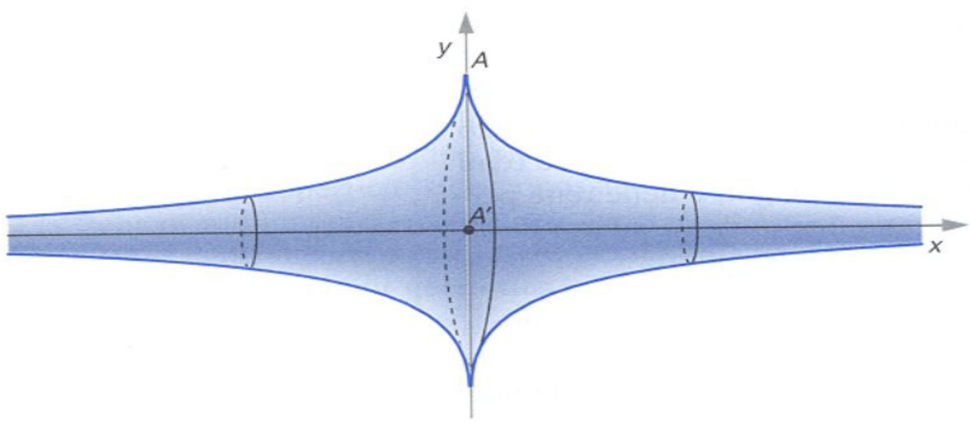
*Un elica e la sua inversa*

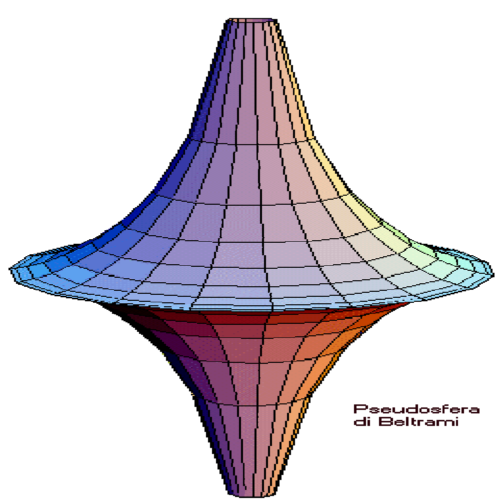
**8. La ciambella (toro) e la sua inversa.**



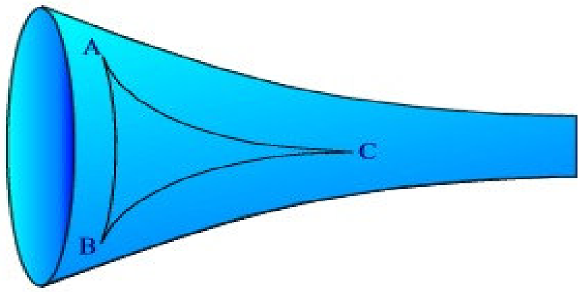
*Un toro e la sua inversa (una ciclide di Dupin)*

**9. La pseudosfera di Beltrami e la sua inversa**

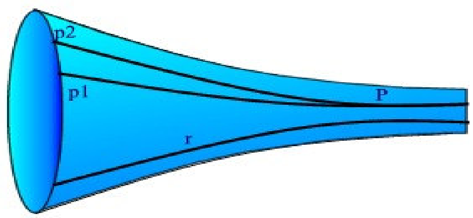


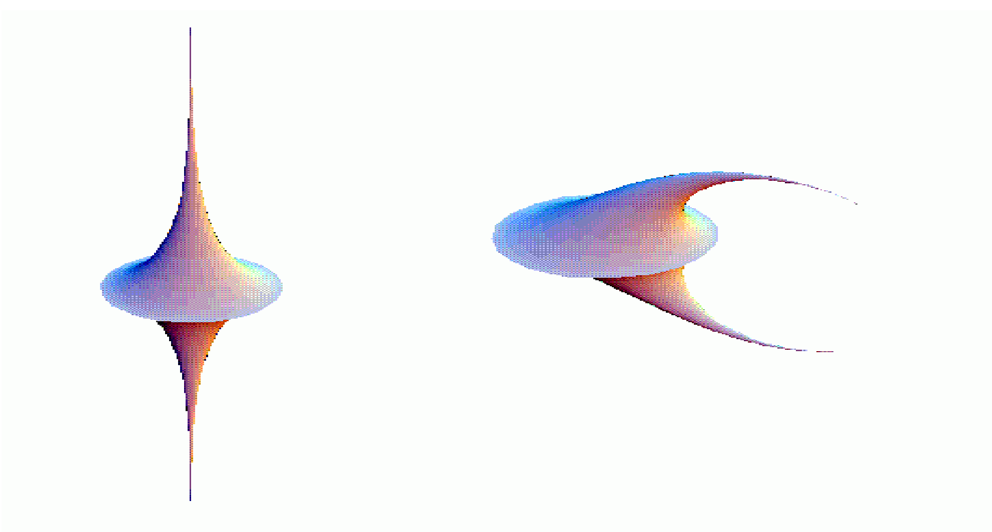
**Il triangolo curvilineo ABC su un pezzo di pseudosfera è il corrispondente di un triangolo rettilineo del piano euclideo, perché è composto da linee geodetiche. La somma degli angoli interni di questo triangolo è minore di 180° e dipende dalla grandezza del triangolo.**




**Per il punto P, esterno alla geodetica r, passano più geodetiche (p1 e p2) che non incontrano la geodetica r e che quindi sono parallele a r.**

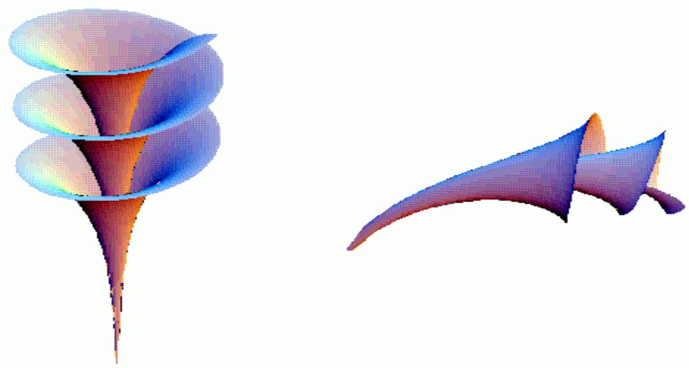



**La pseudosfera è una delle superfici più eleganti. Essa venne costruita e studiata da [Eugenio Beltrami] e rappresenta un modello di geometria non euclidea.**



*La pseudosfera (a sinistra) e la sua inversa (a destra)*

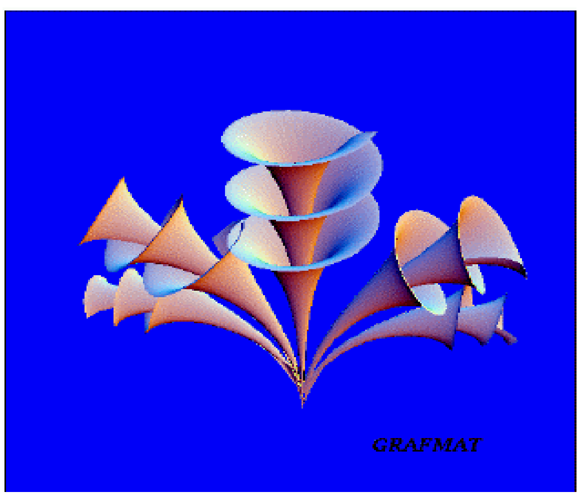
10. Una deformazione della pseudosfera permette di ottenere una superficie molto bella, la superficie di Ulisse Dini. Tale deformazione non modifica le distanze tra i punti, e pertanto, nonostante le apparenze, esse hanno uguale curvatura (in ogni punto!).



*La superficie del Dini (a sinistra) e la sua inversa (a destra)*

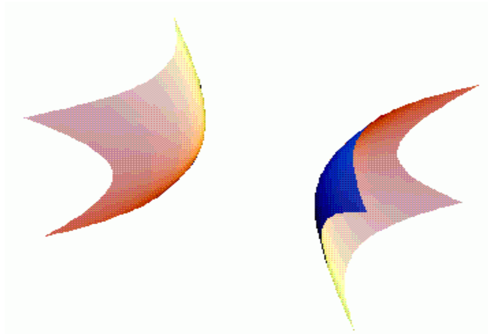
Le inversioni circolari e sferiche sono trasformazioni geometriche che trovano applicazione, oltre che in geometria, nel calcolo infinitesimale e in fisica. Menzioniamo, ad esempio, il fenomeno delle ``immagini elettriche'' di William Thompson (Lord Kelvin), che non è altro che un'inversione sferica.

Talvolta, per motivi prevalentemente grafici, si può far uso di particolari inversioni sferiche per ottenere immagini che danno luogo a composizioni esteticamente sorprendenti. Ecco, ad esempio, un bouquet formato dalla superficie del Dini e da quattro delle sue inverse sferiche.

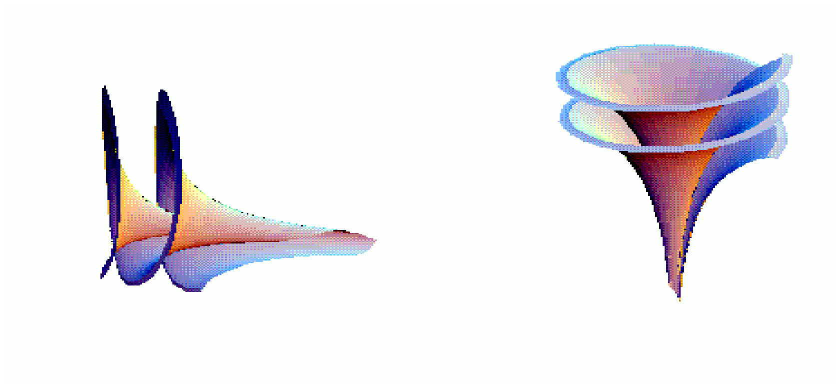



Ci si può chiedere, a questo punto, con un processo mentale tipicamente matematico, se non sia possibile ottenere inversioni diverse sostituendo alla circonferenza ed alla sfera altre curve ed altre superfici notevoli. Una teoria in questo senso è stata sviluppata nel secolo scorso da Thomas Archer Hirst e Giovanni Virginio Schiaparelli con risultati interessanti.

11. **Se alla sfera si sostituisce l'iperboloide di rotazione a due falde**

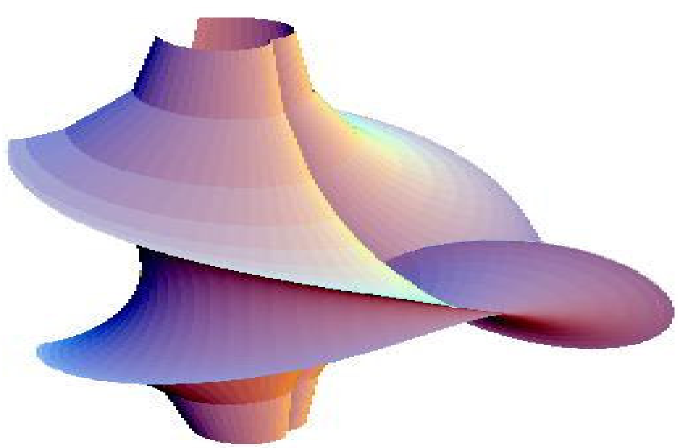


**ecco come viene l'inversa iperbolica della superficie del Dini**



*La superficie del Dini (a destra)*
*e una sua inversa iperbolica (a sinistra)*

12. **Superficie di Kuen**



**(appunti e suggerimenti tratti da http://www.doyouplaymathematics.it)**