Lezione di trigonometria

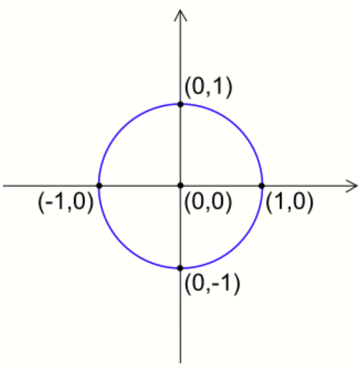
Intanto, non è male riportare le seguenti definizioni:

Goniometria: si occupa della misurazione degli angoli.

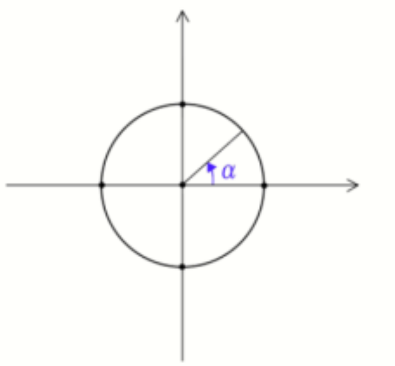
Trigonometria: si occupa delle relazioni che stanno fra i lati e gli angoli di un triangolo. Tali relazioni vengono dette ***funzioni trigonometriche*** (anche ***rapporti trigonometrici***).

Radiante: è quell'arco di circonferenza che sotteso è uguale al raggio.

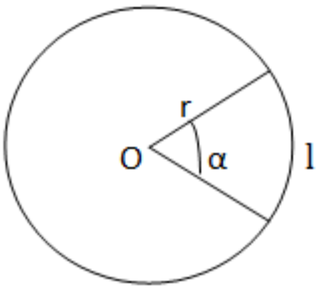
Circonferenza goniometrica: è una circonferenza di raggio unitario.
Per raggio unitario si intende che esso viene assunto come unità di misura.



Circonferenza goniometrica.



Un angolo sulla circonferenza goniometrica.



Il valore del radiante viene ottenuto ricorrendo al teorema di proporzionalità nella circonferenza

"la circonferenza sta all'arco l come l'angolo giro sta ad α"

$$2\pi r : l = 360° : \alpha°$$

da cui $$\alpha° = \frac{360° \cdot l}{2\pi r} = \frac{360°}{2\pi} \quad \text{essendo } l=r$$

Ma $$\frac{360°}{2\pi} = \frac{360°}{6{,}28} = 57°17'' 44''$$

per cui $$\alpha° = 57°17'' 44''$$

A questo angolo corrisponde l'arco l che è la nuova unità di misura chiamata **radiante.**

Dunque, **il radiante è l'arco di circonferenza a cui corrisponde l'angolo al centro di $57°17'44''$.**

SCHEMA PER LA CONVERSIONE DA GRADI A RADIANTI E VICEVERSA

Abbiamo visto che all'angolo di 57°17'44'' corrisponde l'arco radiante che viene assunto come nuova unità di misura e indicata 1_R, cioè

$$1_R = \frac{360°}{2\pi}$$

Quindi $$2\pi_R = 360°$$

In altre parole, **una circonferenza corrisponde ad un angolo di 2π radianti**.

Perciò abbiamo le corrispondenze (sottintendendo i valori della prima colonna in radianti):

2π	360°
π	180°
$\frac{\pi}{2}$	90°
$\frac{\pi}{3}$	60°
$\frac{\pi}{4}$	45°
$\frac{\pi}{6}$	30°

Tavola 1

Più in generale possiamo dire che, indicato con $\alpha°$ l'angolo al centro e con α_R l'arco corrispondente AB,

$$\alpha^{\circ} : \alpha_R = 360° : 2\pi$$

Questa proporzione ci fornisce le formule di conversione:

(a) $$\boxed{\alpha_R = \frac{2\pi}{360^{\circ}} \cdot \alpha^{\circ}}$$

(b) $$\boxed{\alpha^{\circ} = \frac{360^{\circ}}{2\pi} \cdot \alpha_R}$$

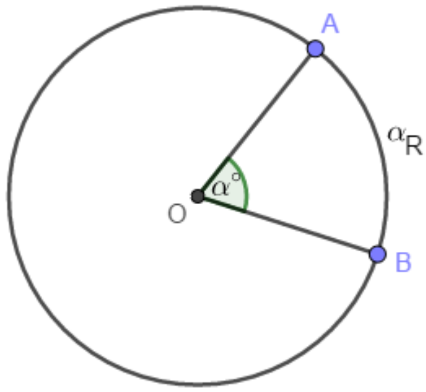
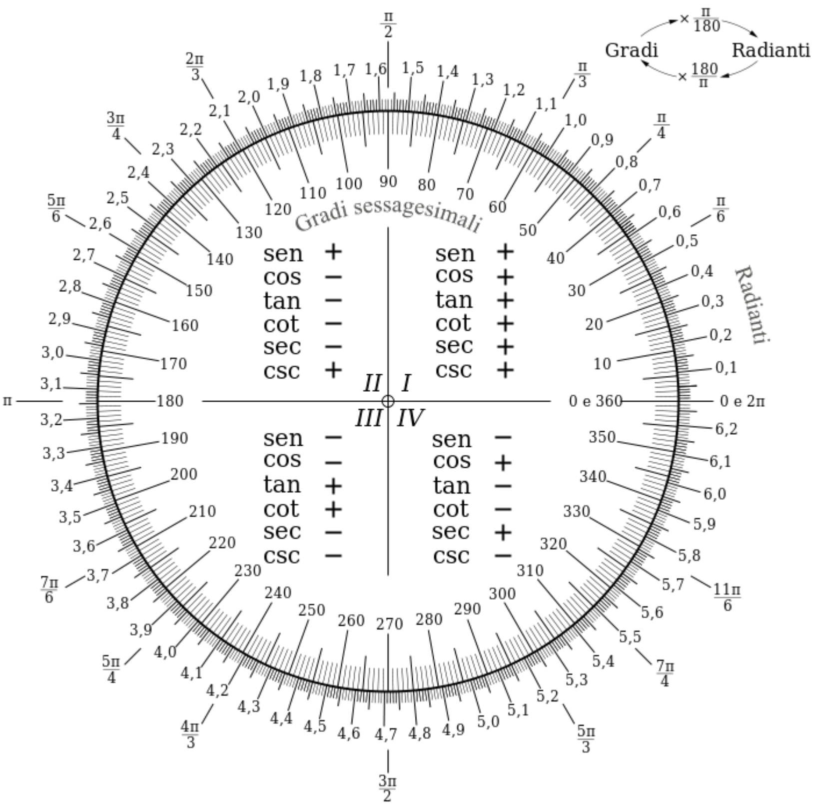


fig.1



Un comodo strumento di rapida conversione è riportato nel disegno accanto, preso da.

https://it.wikipedia.org/wiki/Radiante)

fig.2

Perché si introduce la nuova unità di misura detto, appunto, radiante?

Se vogliamo fare il grafico delle funzioni trigonometriche, per esempio del seno cioè y =sen(x) , dobbiamo riportare sull'asse delle ascisse i valori delle x; ma questi sono valori di angoli in sessagesimi e non sappiamo come riportarli su una retta. Allora sorge la necessità di "rettificare" gli angoli, cioè renderli equivalenti a segmenti che possono essere riportati sull'asse. Di qui l'introduzione della nuova unità di misura radiante. Ad angoli al centro corrispondono archi che, sottesi, diventano segmenti che si possono riportare facilmente sull'asse delle ascisse x. Vedremo dopo il grafico delle funzioni goniometriche elementari, dopo averle definite cosi come di seguito.

DEFINIZIONI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

Seno, coseno, tangente, cotangente, secante e cosecante.

Sia una circonferenza goniometrica e tracciamo il raggio vettore OA, che forma con l'asse delle x l'angolo α.
Sia B la proiezione di A sull'asse delle x, sia C la proiezione di A sull'asse delle y.
Teniamo presente il triangolo rettangolo ottenuto OAB (fig.3).

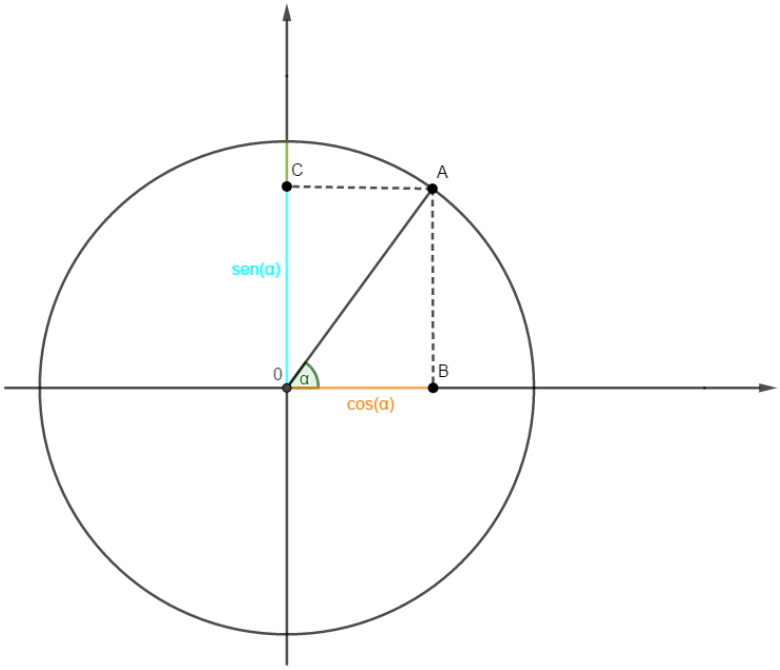


fig.3

SENO

*Si definisce **seno** dell'angolo α come il rapporto tra il cateto opposto ad α e il raggio (che poi è l'ipotenusa del triangolo OAB:*

$$sen(\alpha) = \frac{AB}{r = OA}$$

COSENO

*Si definisce **coseno** dell'angolo α come il rapporto tra il cateto adiacente ad α e il raggio.*

$$cos(\alpha) = \frac{OB}{r = OA}$$

Tracciamo la tangente alla circonferenza nel punto A (fig.4). La tangente interseca l'asse X in un punto, che chiamiamo E (fig.4).

TANGENTE

*Si definisce **tangente** di α come il rapporto tra il segmento AE e il raggio*

$$tan(\alpha) = \frac{AE}{r = OA}$$

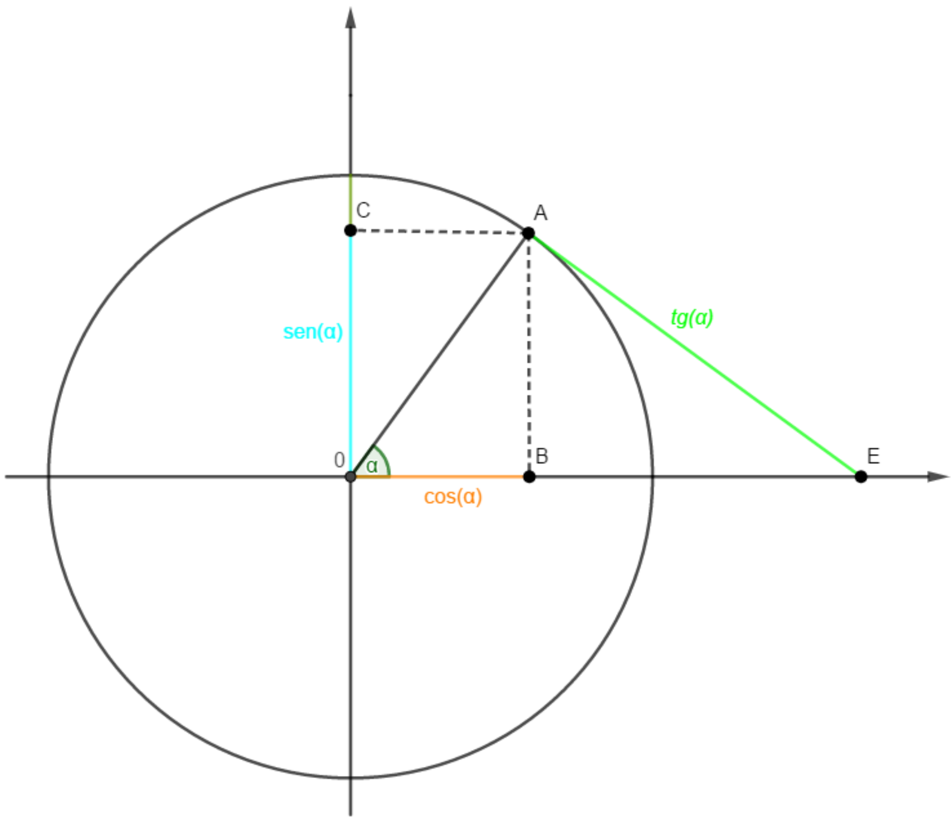


fig.4

La tangente di α può essere definita anche come il rapporto tra il cateto opposto ad α e il cateto adiacente. Oppure, che è lo stesso, il rapporto tra il seno e il coseno di detto angolo:

$$tan(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$$

Si hanno le ulteriori funzioni trigonometriche la cui rappresentazione grafica è riportata nella figura 4.

La tangente in A alla circonferenza interseca l’asse delle y nel punto F (fig.5).

COTANGENTE

*Si definisce **cotangente** di α come il rapporto tra il segmento AF e il raggio.*

$$cotan(\alpha) = \frac{AF}{r = OA}$$

La cotangente di α può essere definita anche come il rapporto tra il cateto adiacente ad α e il cateto opposto. Oppure, che è lo stesso, il rapporto tra il coseno e il seno di detto angolo.
La cotangente risulta, così, essere anche l'inverso della tangente.

$$cotan(\alpha) = \frac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)} = \frac{1}{tan(\alpha)}$$

Sempre guardando la fig.5 si hanno le ulteriori definizioni:

SECANTE

*Si definisce **secante** di α come il rapporto tra il segmento OE e il raggio.*

$$sec(\alpha) = \frac{OE}{r = OA}$$

Essa risulta essere la reciproca del coseno:

$$sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)}$$

COSECANTE

*Si definisce **cosecante** di α come il rapporto tra il segmento OF e il raggio.*

$$cosec(\alpha) = \frac{OF}{r = OA}$$

Essa risulta essere la reciproca del seno:

$$cosec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)}$$

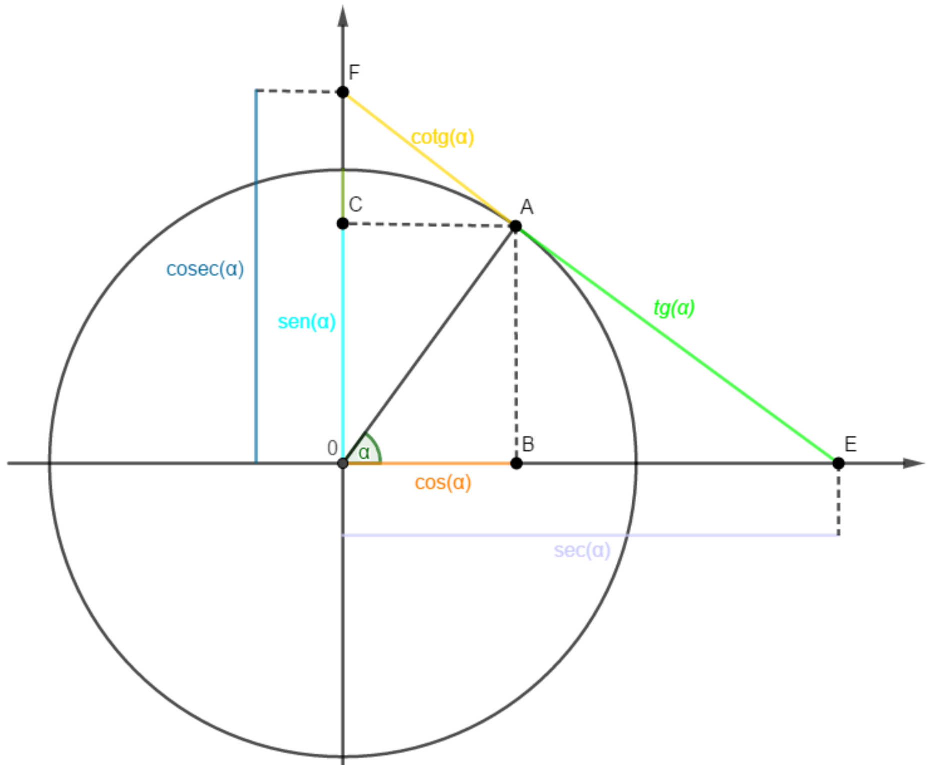


fig.5

Non dimentichiamo che il raggio è unitario per cui lo assumiamo uguale ad 1: r=1. Da qui

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{r} = \overline{AB}$$
$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{OB}}{r} = \overline{OB}$$
$$\operatorname{tang}(\alpha) = \frac{\overline{AE}}{r} = \overline{AE}$$
$$\operatorname{contag}(\alpha) = \frac{\overline{AF}}{r} = \overline{AF}$$
$$\sec(\alpha) = \frac{\overline{OE}}{r} = \overline{OE}$$
$$\operatorname{cosec}(\alpha) = \frac{\overline{OF}}{r} = \overline{OF}$$

Tavola 2

Dalle definizioni delle funzioni goniometriche si evince che esse assumono valori negli intervalli:

$$-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$$
$$-1 \leq cos(x) \leq 1$$
$$-\infty < \tan(x) < +\infty$$
$$-\infty < cotan(x) < +\infty$$

Tavola 3

Osserviamo che le funzioni goniometriche sono periodiche, nel senso che si ripetono dopo ogni giro sulla circonferenza, per cui esse vanno studiate nel loro periodo.

Se indichiamo con T il periodo si ha che una funzione è periodica quando $f(x+T) = f(x)$.

Qui di seguito riporto il grafico delle funzioni seno e coseno (fig.6), tangente e cotangente (fig.7), secante e cosecante (fig.8).

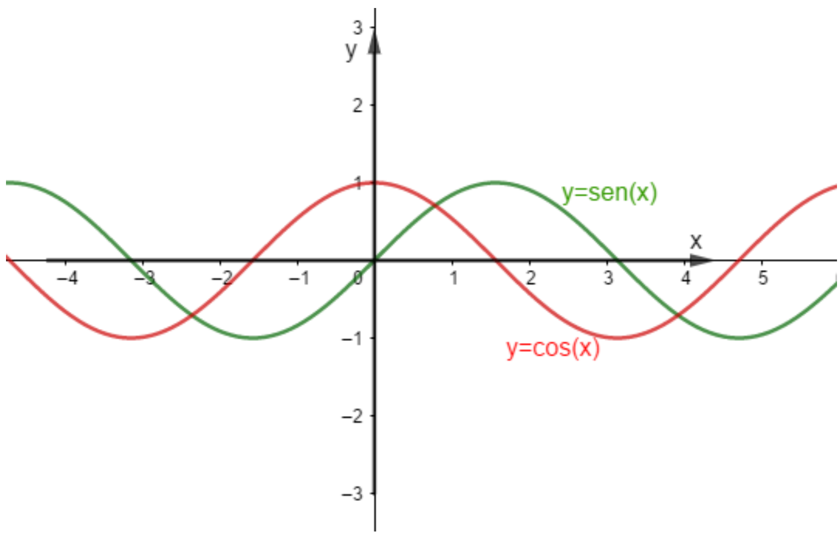


fig.6

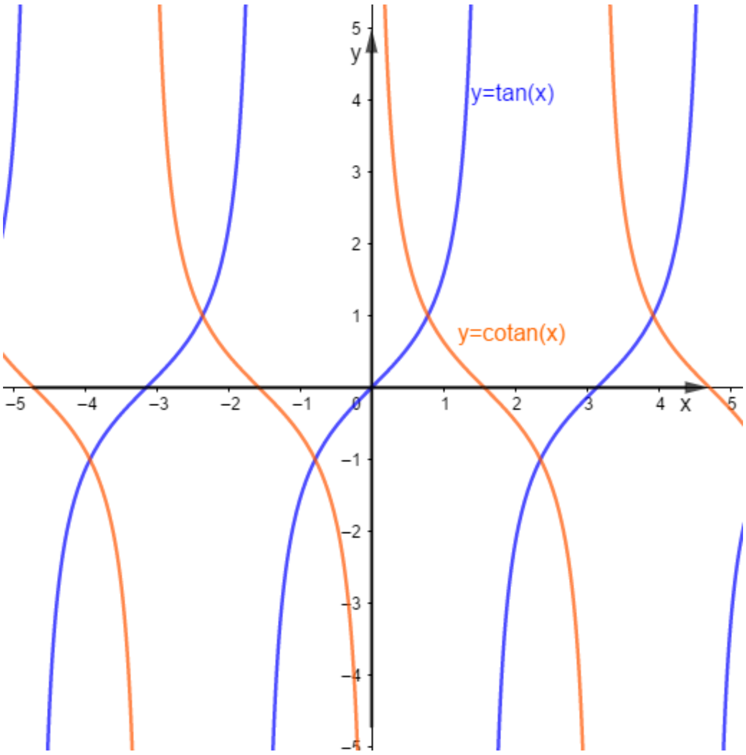


fig.7

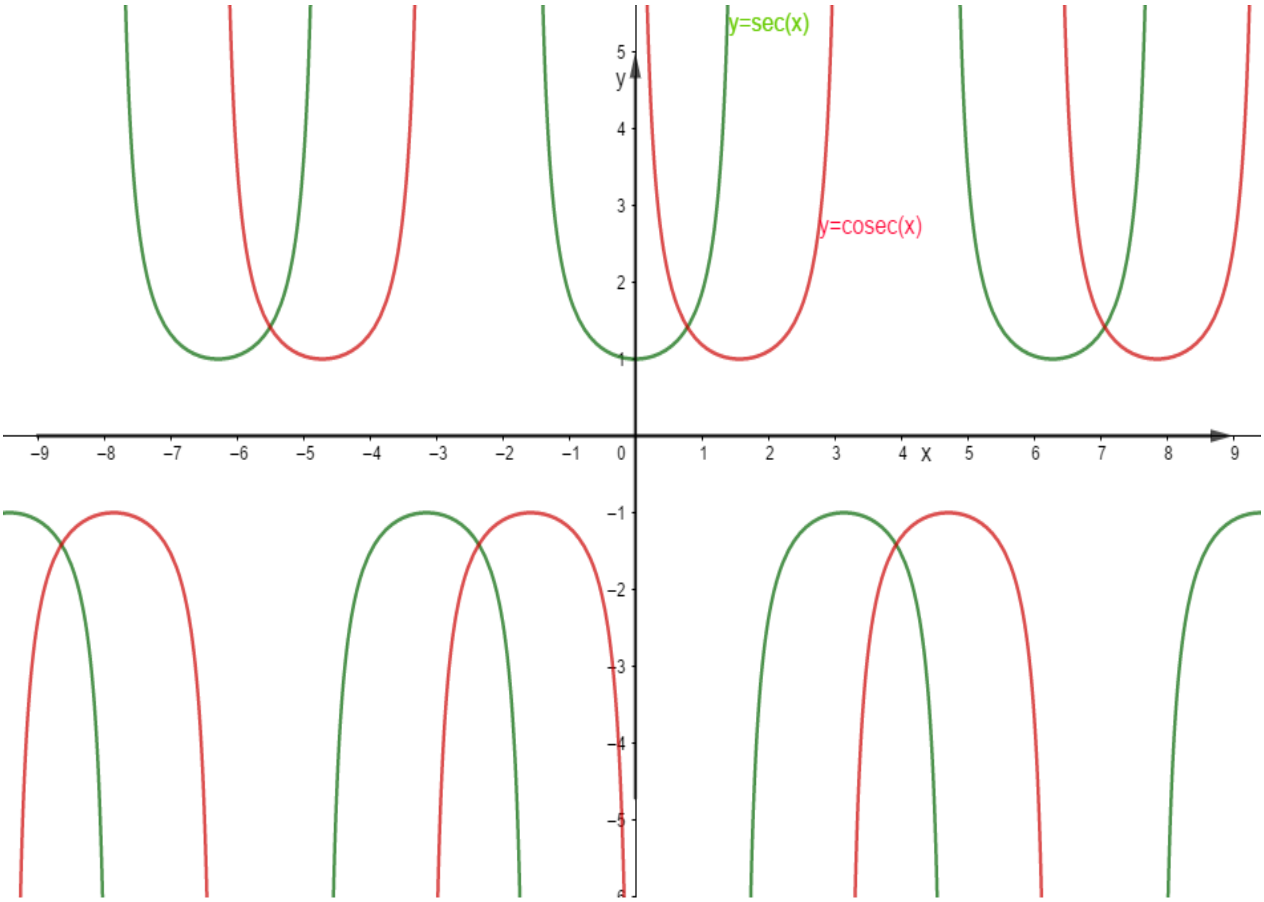


fig.8

Relazioni fondamentali

Le funzioni di seno, coseno, tangente, cotangente, secante e cosecante, che io chiamo "i sei personaggi in cerca di autore", sono legate tra loro da legami, diciamo così, di "parentela" molto stretti. I legami sono le cosiddette formule (ma che io chiamo *relazioni* più correttamente).

Quelle che dobbiamo ricordare di più sono le seguenti:

1^ relazione fondamentale

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1 \quad (1)$$

2^ relazione fondamentale

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)} \quad (2)$$

3^ relazione fondamentale

$$cotg(x) = \frac{1}{tg(x)} = \frac{\cos(x)}{sen(x)} \quad (3)$$

Inoltre si hanno le seguenti altre relazioni, ai fini di eseguire gli esercizi:

$$cos(x) = \frac{1}{\mp\sqrt{1 + tg^2(x)}} = \frac{\mp cotg(x)}{\sqrt{1 + cotg^2(x)}} \quad (4)$$

$$sen(x) = \frac{tg(x)}{\mp\sqrt{1 + tg^2(x)}} = \frac{1}{\mp\sqrt{1 + cotg^2(x)}} \quad (5)$$

$$sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \quad (6)$$

$$cosec(x) = \frac{1}{\mathrm{sen}(x)} \quad (7)$$

Dimostro la (4):

$$cos^2(x) = \frac{cos^2(x)}{1} = \frac{cos^2(x)}{sen^2(x) + cos^2(x)} = \frac{\frac{cos^2(x)}{cos^2(x)}}{\frac{sen^2(x) + cos^2(x)}{cos^2(x)}} = \frac{1}{\frac{sen^2(x)}{cos^2(x)} + \frac{cos^2(x)}{cos^2(x)}} = \frac{1}{tg^2(x) + 1}$$

Di conseguenza $$cos(x) = \frac{1}{\mp\sqrt{1+tg^2(x)}}$$

Per ottenere la seconda uguaglianza nella (4) si divide numeratore e denominatore non per $cos^2(x)$ ma per $sen^2(x)$. Analogamente si dimostra la (5).

Osservazioni

1) E' preferibile scrivere l'argomento fra parentesi: sen(x) piuttosto che sen x;
2) Le scritture $sen^2(x)\ e\ (sen(x))^2$ si equivalgono, cioè $(sen(x))^2 = sen^2(x)$. Cosi per le altre funzioni goniometriche.

APPROFONDIMENTI

Storicamente, sono state prese in considerazione altre funzioni trigonometriche che per certi motivi erano importanti all'epoca. Vediamole (vedi fig.9).

- **Verseno:** $versen(\alpha) = 1 - \cos(\alpha)$

Il verseno appariva in alcune delle prime tabelle trigonometriche, ora non viene praticamente utilizzato. Esistono diversi rapporti trigonometrici relativi alle versine elencate di seguito.

- **Vercoseno:** $vercosen(\alpha) = 1 + \cos(\alpha)$ (non è riportato nelle fig.4)
- **Coverseno**: $coversen(\alpha) = 1 - sen(\alpha)$
- **Covercoseno**: $covercosen(\alpha) = 1 + sen\ (\alpha)$ (non è riportato nelle fig.4)
- **Semiverseno** :

$$semiversen(\alpha) = \frac{versen(\alpha)}{2}$$

Il semiverseno (*haversin* in inglese) era ben noto e ampiamente usato nella navigazione perché faceva parte della formula del semiverseno per il calcolo della distanza tra due punti di una sfera date le loro longitudini e latitudini.

- **Semivercoseno** : $semivercos(\alpha) = \frac{vercos(\alpha)}{2}$
- **Semicoverseno** : $semicoversen(\alpha) = \frac{coversen(\alpha)}{2}$
- **Semicovercoseno** : $semicovercos(\alpha) = \frac{covercos(\alpha)}{2}$

Sicuramente per molti di voi queste funzioni trigonometriche sono totalmente nuove.
Anche per le due successive possiamo dire la stessa cosa.

- **Exsecante** : $exsec(\alpha) = sec(\alpha) - 1$

La exsecante, che non viene più usata, era molto importante in agrimensura, astronomia e trigonometria sferica.

- **Excosecante** : $excosec(\alpha) = cosec(\alpha) - 1$

La figura 9 riporta il grafico delle sei funzioni più utilizzate oggi insieme al verseno, al coverseno, all'exsecante e all'excosecante (tranne il vercoseno e il covercoseno).

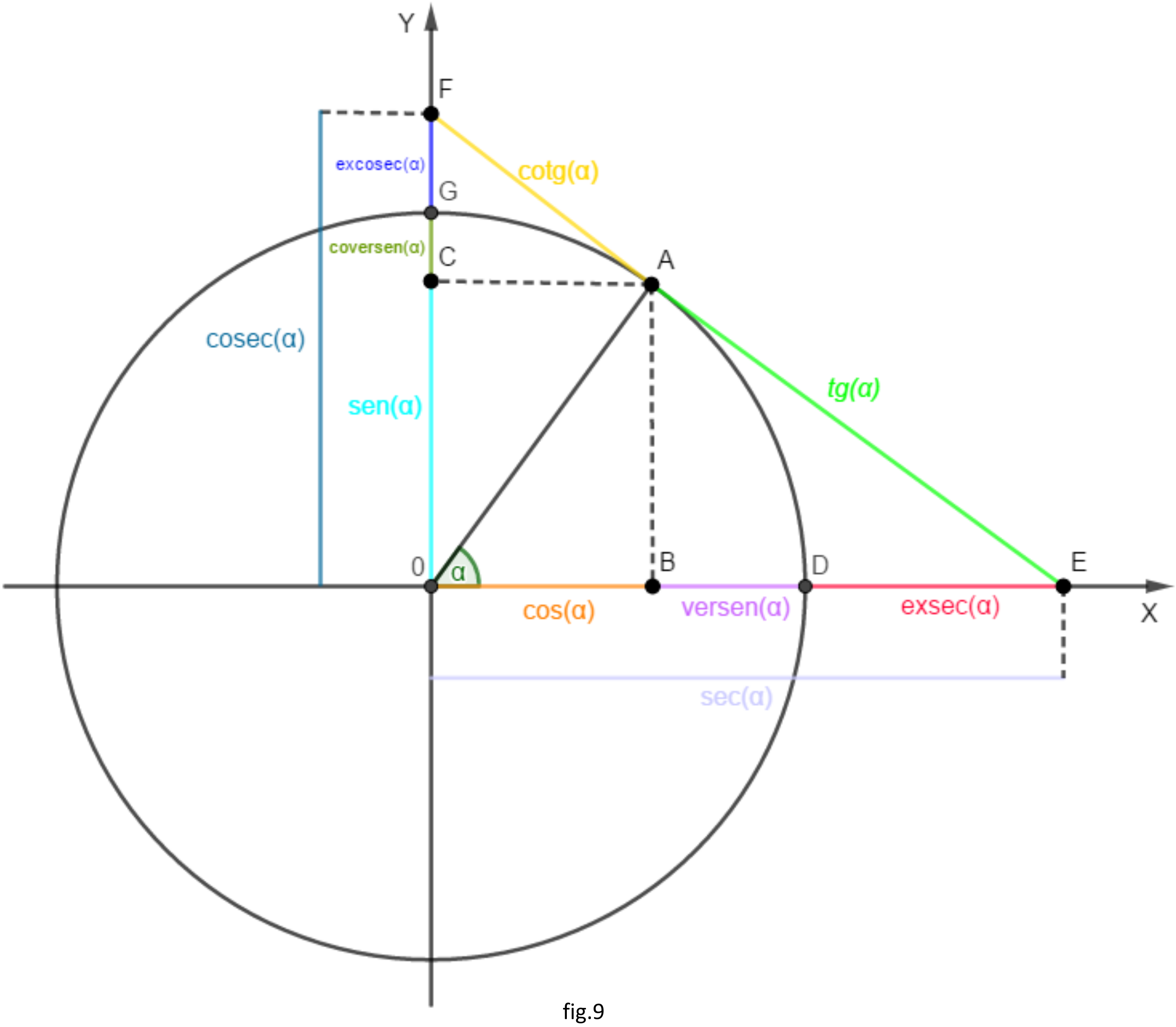


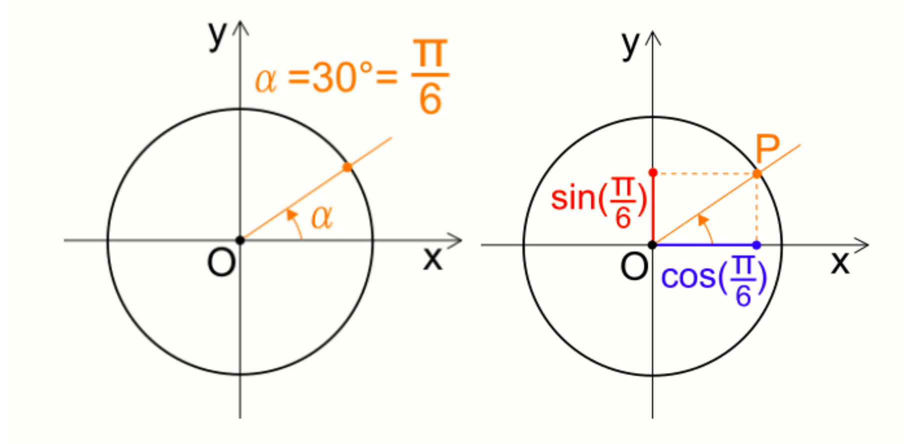
fig.9

I disegni delle figure, seppure suggerite dal sito sottostante, sono stati creati con Geogebra.

https://www.gaussianos.com/cuantas-razones-trignonometricas-existen/

Valori particolari delle funzioni goniometriche

1) α=π/6



sen(30°)=$\frac{1}{2}$;

cos(30°)=$\frac{\sqrt{3}}{2}$;

tang(30°)=$\frac{\sqrt{3}}{3}$;

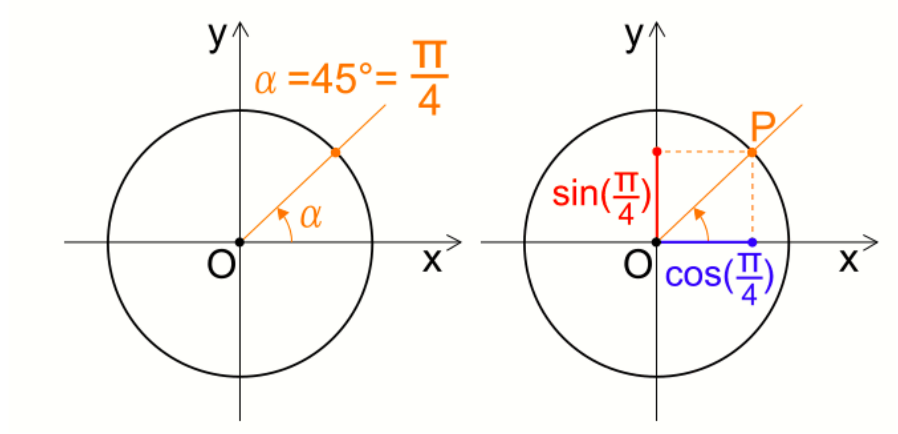
cotang(30°)=$\sqrt{3}$;

sec(30°)=$\frac{1}{\cos(30°)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

cosec(30°)=$\frac{1}{\sin(30°)} = 2$;

fig.10

2) α=π/4



$\text{sen}(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\tan(45°) = 1$;

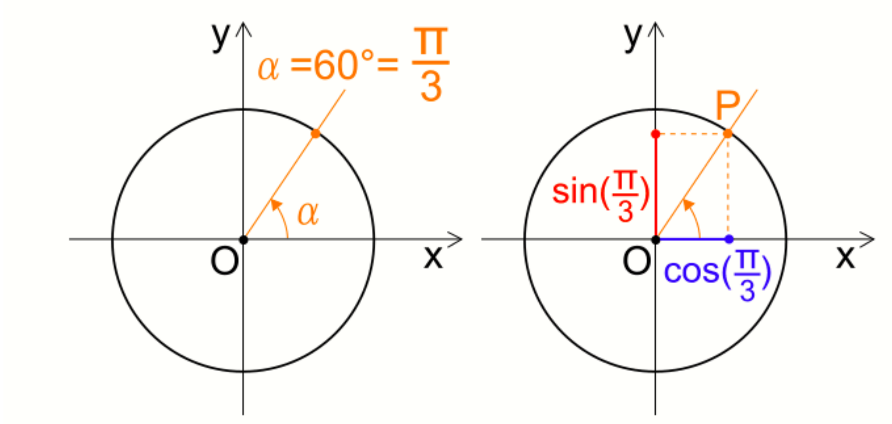
$\text{cotan}(45°) = 1$;

$\sec(45°) = \sqrt{2}$;

$\text{cosec}(45°) = \sqrt{2}$;

fig.11

3) α=π/3



$\text{sen}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos(60°) = \frac{1}{2}$;

$\text{tang}(60°) = \sqrt{3}$;

$\text{cotang}(60°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\sec(60°) = 2$;

$\text{cosec}(60°) = \frac{2}{\sqrt{3}}$;

fig.12

(Questi disegni, invece, sono ripresi dal sito https://www.youmath.it)

Raccogliamo questi valori in una tavola

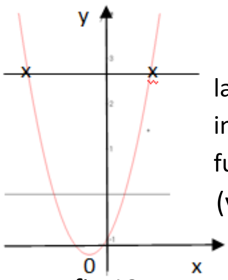
α in gradi	α in radianti	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$	$\cot(\alpha)$
$0°$	0	0	1	0	$\nexists$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$	0
$180°$	π	0	-1	0	$\nexists$
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\nexists$	0
$360°$	2π	0	1	0	$\nexists$

Tavola 4

*****

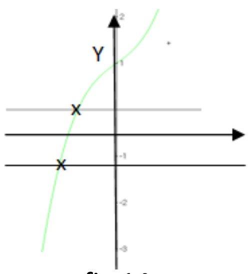
Qualche considerazione sulle funzioni.

- **Una funzione f può ammettere l'inversa f^{-1}**. Siamo sicuri che una funzione f ammette inversa f^{-1} se e solo se essa è **bigettiva**. Per sapere se una funzione è bigettiva, deve accadere che una qualsiasi retta parallela all'asse delle x intersechi il suo grafico in un sol punto.



la retta interseca il grafico in due punti, dunque la funzione **non** è bigettiva (vedi fig.13)

fig.13



ciascuna retta interseca il grafico in un sol punto, dunque la funzione è bigettiva (vedi fig.14)

fig.14

- Inoltre, una funzione f e la sua inversa f^{-1} hanno grafici che sono **simmetrici** rispetto alla bisettrice del I e III quadrante (vedi figura 15).

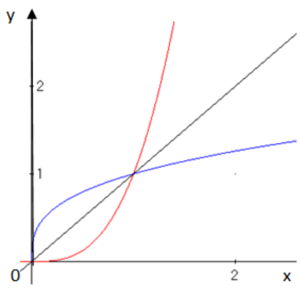


fig.15

Dominio e Codominio delle funzioni trigonometriche

Ricordiamo che il

***D**ominio, o campo di esistenza, di una funzione è l'insieme dei valori della x in corrispondenza di ciascun dei quali esiste il valore della y.*

***C**odominio di una funzione è l'insieme dei valori della y ciascun dei quali è corrispondente di un valore della x.*

Per le funzioni trigonometriche possiamo fare riferimento alla seguente tabella.

Funzione diretta	**Dominio**	**Codominio**	Funzione inversa	**Dominio**	**Codominio**
y = sen(x)	**D**=$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$	**C**=[- 1;1]	y = arcsen(x)	**D**=[- 1;1]	**C**=$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$
y = cos(x)	**D**=$[0;\pi]$	**C**=[- 1;1]	Y = arcos(x)	**D**=[- 1;1]	**C**=$[0;\pi]$
y = tg(x)	**D**=$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$	**C**=$\mathbb{R}$	Y = arctg(x)	**D**=$\mathbb{R}$	**C**=$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$
y = cotg(x)	**D**=$]0;\pi[$	**C**=$\mathbb{R}$	y = arccotg(x)	**D**=$\mathbb{R}$	**C**=$]0;\pi[$

Tavola 5

Attenzione, non bisogna confondere la funzione inversa con la reciproca. Vedi la lezione sulle funzioni inverse e reciproche delle funzioni goniometriche elementari.

*****

Equazioni goniometriche

Ci sono vari tipi di equazioni goniometriche.

1) equazioni goniometriche elementari. Sono del tipo

sen(x) = m	cos(x) = n	tang(x) = p
cotang(x) = q	sec(x) = r	cosec(x) = s

2) equazioni goniometriche del tipo

sen(f(x)) = m	cos(f(x)) = n	tang(f(x)) = p
contang(f(x)) = q	sec(f(x)) = r	cosec(f(x)) = s

3) equazioni goniometriche per confronto del tipo

sen(f(x)) = sen(g(x))	cos(f(x)) = cos(g(X))	tang(f(x)) = tan(g(x))
cotang(f(x) = cotang(g(x))	sec(f(x)) = sec(g(x))	cosec(f(x)) = cosec(g(x))

4) equazioni goniometriche lineari in seno e coseno

$$a \cdot sen(x) + b \cdot cos(x) + c = 0$$

5) equazioni goniometriche di 2° grado in seno e coseno del tipo

$$a \cdot sen^2(x) + b \cdot sen(x)cos(x) + c \cdot cos^2(x) + d = 0$$

Equazioni goniometriche elementari

1. sen(x) = m Il seno di un angolo è l'ordinata del punto A della circonferenza a cui l'angolo è associato.
ordinata AK = BK'= m (fig.16)

Le soluzioni sono:

$$x = \alpha^\circ + 2k\pi$$
$$x = (\pi - \alpha^\circ) + 2k\pi$$

Esempio: $sen(x) = \frac{1}{2}$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$$

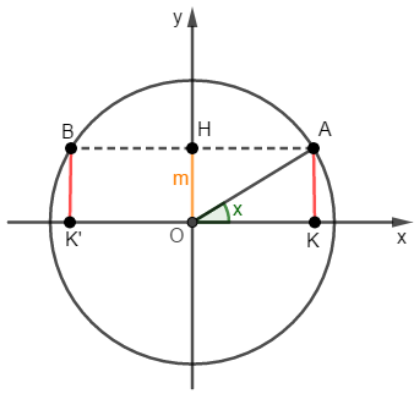


fig.16

2. cos(x) = n Il coseno di un angolo è l'ascissa del punto A della circonferenza a cui l'angolo è associato.
ascissa OH = n. (fig.17)

Le soluzioni sono:

$$x = \pm\alpha^\circ + 2k\pi$$

Esempio: $\cos(x) = \frac{1}{2}$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

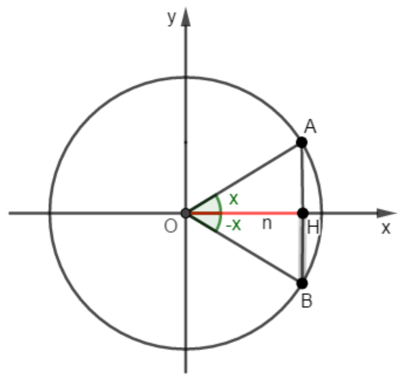


fig.17

3. tan(x) = p La tangente di un angolo è il segmento tangente che va da un punto A della circonferenza all'asse delle x.
segmento tangente AB = p (fig.18)

Le soluzioni sono:

$$x = \alpha^\circ + h\pi$$

Esempio: $\tan(x) = \sqrt{3}$

$$x = \frac{\pi}{3} + h\pi$$

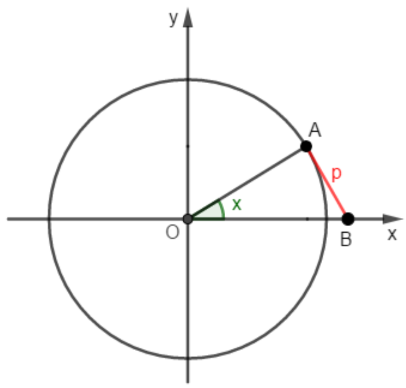


fig.18

4. $a\ sen(x) + b\cos(x) = 0$

Posto $\cos(x) \neq 0$ per cui $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, si ha

$$\frac{a\ sen(x)}{\cos(x)} + \frac{b\cos(x)}{\cos(x)} = 0$$

da cui $a\tan(x) + b = 0$

quindi $\tan(x) = -\frac{b}{a}$

E si ricade nel caso del punto **3** di pagina 14.

5. $a\,sen(x) + b\cos\ (x) + c = 0$ (è diverso dal caso precedente del punto 4, qui c'è il termine noto)

Ci sono più modi per risolvere questo tipo di equazione.

5.1. Ricorrendo alle relazioni

$$sen(x) = \frac{2\ \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^{2}\left(\frac{x}{2}\right)}\ ; \cos(x) = \frac{1 - \tan^{2}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^{2}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Sostituendo

$$a\ \frac{2\ \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^{2}\left(\frac{x}{2}\right)} + b\ \frac{1 - \tan^{2}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^{2}\left(\frac{x}{2}\right)} + c = 0$$

Da cui

$$2a\tan\left(\frac{x}{2}\right) + b - b\tan^{2}\left(\frac{x}{2}\right) + c + c\ \tan^{2}\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

E quindi

$$(-b + c)tan^{2}\left(\frac{x}{2}\right) + 2a\tan\left(\frac{x}{2}\right) + c + b = 0 \qquad \textbf{(5.1.1)}$$

Che è un'equazione di 2° grado in $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ che, risolta, dà due equazioni di primo grado del tipo al punto **3**.

NOTA BENE:
Questo metodo va bene solo se esiste la tangente di $\frac{x}{2}$, cioè solo se $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x \neq \pi + 2k\pi$.
In altre parole, prima di applicare tale metodo, occorre verificare che $x = \pi + 2k\pi$ sia soluzione dell'equazione data. Poi si risolve l'equazione in $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

5.2. Metodo grafico

Si fa ricorso alla geometria analitica, osservando che $sen^{2}(x) + cos^{2}(x) = 1$e ponendo

$sen(x) = Y\ e\ \cos(x) = X$. Si risolve, cosi, il sistema

$$\begin{cases} a\,Y + b\,X + c = 0 \\ X^{2} + Y^{2} = 1 \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta una retta, la seconda una circonferenza di raggio 1.

5.3. Metodo dell'angolo aggiunto. E' il più interessante. Dobbiamo solo ricordare che

$$a\,sen(x) + b\,cos(x) = r\,sen(x + \alpha)^{(1)} \quad \text{con} \quad r = \sqrt{a^{2} + b^{2}}\ \ e\ \ \tan(\alpha) = \frac{b}{a}$$

Allora l'equazione

$$a\,sen(x) + b\cos(x) + c = 0$$

Diventa

$$r\,sen(x + \alpha) + c = 0 \rightarrow\ sen(x + \alpha) = -\frac{c}{r}$$

A cui si applica il caso **1** di pag 13.

****

(1) Do una dimostrazione.
Intanto $r\,sen(x+\alpha) = r(sen(x)\cos(\alpha) + sen(\alpha)\cos(x)) = rsen(x)\cos(\alpha) + rsen(\alpha)\cos(x)$
Per l'identità dei polinomi, dall'uguaglianza

$$a\,sen(x) + b\cos(x) = rsen(x)\cos(\alpha) + rsen(\alpha)\cos(x)$$

si deve avere che $a = rcos(\alpha)$ e $b = rsen(\alpha)$ che, elevati al quadrato, danno

$$a^2 = r^2cos^2(\alpha)$$

$$b^2 = r^2sen^2(\alpha)$$

Sommando membro a membro si ha

$$a^2 + b^2 = r^2cos^2(\alpha) + r^2sen^2(\alpha) = r^2\left(cos^2(\alpha) + sen^2(\alpha)\right) = r^2 \cdot 1 = r^2$$

E quindi $$r^2 = a^2 + b^2$$

Dividendo membro a membro si ha

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{r^2sen^2(\alpha)}{r^2cos^2(\alpha)} \rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \tan^2(\alpha) \rightarrow \tan(\alpha) = \frac{b}{a}$$

****

Faccio un esempio di risoluzione di un'equazione del tipo 5 con i vari metodi sopra riportati.
Sia l'equazione

$$2\,sen(x) - \cos(x) - 1 = 0$$

- Ricorro al metodo di cui al punto 5.1. Prima di applicare la (5.1.1), verifico che $x = \pi + 2k\pi$ è soluzione dell'equazione.

Sostituisco $x = \pi$ nell'equazione:
$2\,sen(\pi) - \cos(\pi) = 1 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 0 - (-1) = 1 \quad \rightarrow \quad 1 = 1,$
l'equazione è verificata. Applico allora la (5.1.1):

$$\big(1-(-1)\big)c + 4\tan(x) + 1 - 1 = 0 \rightarrow 2\,tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 4\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \rightarrow 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 2) = 0$$

Da cui le due equazioni goniometriche elementari

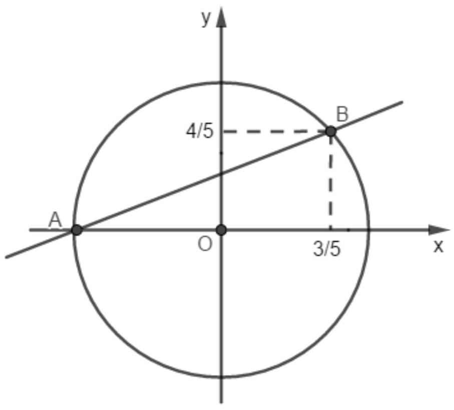


fig.19

$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \quad e \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 2 = 0$ e si nel caso **<u>3</u>** di pagina 13.

- Ora ricorro al metodo grafico di cui al punto 5.2. Pongo

$sen(x) = Y$ e $\cos(x) = X \rightarrow sen^2(x) = Y^2, cos^2(x) = X^2 \rightarrow sen^2(x) + cos^2(x) = X^2 + Y^2 = 1$. Pertanto si ha il sistema seguente

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 1 \\ 2Y - X = 1 \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta una circonferenza con centro nell'origine e raggio 1, la seconda una retta. Ne faccio il grafico e risolvo il sistema che mi dà due punti A e B di coordinate A(-1;0) e B$\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Quindi da A ho:

$$X = -1 \text{ cioè } \cos(x) = -1$$
$$Y = 0 \text{ cioè } sen(x) = 0;$$

Da B ho:

$$X = \frac{3}{5} \quad cio\text{è} \cos(x) = \frac{3}{5}$$
$$Y = \frac{4}{5} \quad cio\text{è}\ sen(x) = \frac{4}{5}$$

che sono equazioni goniometriche elementari.

- Risolvo l'equazione $\sqrt{3}sen(x) + \cos(x) + 1 = 0$, nella quale $a = \sqrt{3}, b = 1, c = 1$, col metodo dell'angolo aggiunto.

Calcolo $r = \sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow r = \sqrt{4} = 2, mentre\ da\ \tan(\alpha) = \frac{b}{a} \rightarrow \tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$
Con l'angolo aggiunto l'equazione si scrive

$$rsen(x + \alpha) + c = 0 \rightarrow 2sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0 \rightarrow sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

che è un'equazione goniometrica elementare.

Altri tipi di esercizi.

1) Determinare le condizioni a cui deve soddisfare il parametro a affinché sia soddisfatta l'uguaglianza

$$(2a\text{-}3) \cos(x) = -a + 4$$

nel 2° quadrante.

<u>Risolvo</u>

L'uguaglianza si scrive $\cos(x) = \frac{-a+4}{2a-3}$; poiché le x stanno nel secondo quadrante, esse devono essere negative. Inoltre il codominio della funzione coseno è C = [- 1;1]. Ma noi dobbiamo considerare solo $-1 \leq \cos(x) \leq 0$; pertanto dobbiamo risolvere le disequazioni

$$-1 \leq \frac{-a+4}{2a-3} \leq 0$$

Che equivalgono al sistema

$$\begin{cases} -1 \leq \dfrac{-a+4}{2a-3} \\ \dfrac{-a+4}{2a-3} \leq 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $a \leq -1 \quad \vee \quad a \geq 4$.

2) Determinare le condizioni a cui deve soddisfare il parametro k affinché sia soddisfatta l'uguaglianza

$$tg(x) = \frac{2k}{k+2}$$

nel 1° quadrante.

<u>Risolvo</u>

Le x nel primo quadrante sono positive; il codominio della tangente è C=$\mathbb{R}$

Dobbiamo risolvere la disequazione

$$tg(x) \geq 0$$

cioè $\frac{2k}{k+2} \geq 0$,le cui soluzioni sono $k < -2 \quad \vee \quad k \geq 0$.

3) Dato $tg(x) = \frac{1}{5}$, calcolare $\cos(x)$.

<u>Risolvo</u>

In base alla (4) di pag.8, che qui riporto per comodità $cos(x) = \frac{1}{\mp\sqrt{1+tg^2(x)}}$, si ha

$$cos(x) = \frac{1}{\mp\sqrt{1+tg^2(x)}} = \frac{1}{\mp\sqrt{1+(\frac{1}{5})^2}} = \frac{1}{\mp\sqrt{\frac{25+1}{25}}} = \mp\frac{5}{\sqrt{26}}$$

4) Determinare il dominio della funzione

y = arcsen($4x-3$)

Risolvo

Poiché il dominio dell'arcoseno è [-1;1], allora si ha

$$-1 \le 4x-3 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le 4x-3 \\ 4x-3 \le 1 \end{cases}$$

Dal sistema, risolto, si ha il dominio

$$D = \left[\frac{1}{2};1\right]$$

5) Calcolare

sen(arctg(1))

Risolvo

E' una funzione composta. Calcoliamo prima il valore della funzione interna

$arctg(1) = \frac{\pi}{4}$ e quindi $sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6) Determinare il dominio della funzione

$$y = \arccos\,(-x^2+2x)$$

Risolvo

Poiché il dominio dell'arco coseno è D = [-1;1], allora si ha

$$-1 \le -x^2+2x \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le -x^2+2x \\ -x^2+2x \le 1 \end{cases}$$

che, risolto, fornisce il dominio

$$D = \left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$$

7) trovare il dominio e la funzione inversa, restringendo tale dominio se necessario (per avere l'inversa bisogna restringere il dominio in modo che la funzione sia bigettiva), della funzione

$$y = \arccos\,(\frac{x+1}{2x})$$

Risolvo

Poiché il dominio dell'arco coseno è [-1;1], si ha

$$-1 \le \frac{x+1}{2x} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le \frac{x+1}{2x} \\ \frac{x+1}{2x} \le 1 \end{cases}$$

che, risolto, dà

$$D = \left\{x \le -\frac{1}{3} \vee x \ge 1\right\}$$

Per l'inversa: $\cos(y) = \cos\left(\arccos\left(\frac{x+1}{2x}\right)\right) = \frac{x+1}{2x} \rightarrow x = \frac{1}{2\cos(y)-1}$

Scambiando la x con la y si ha

$$y = \frac{1}{2\cos(x)-1}$$

Puoi inventare tu tanti esercizi ai quali applicare le relazioni (1), (2), (3), (4) e (5) (ma anche altre relazioni non riportate in questi appunti, ma che si ricavano facilmente, a seconda dell'esercizio).

Per esercizi di ripetizione sulle equazioni ti rimando al sito:
https://www.youmath.it/lezioni/algebra-elementare/equazioni/153-equazioni-trigonometriche.html