5. Numeri

Sappiamo che le frazioni danno luogo a numeri decimali finiti o illimitati ma con periodo (semplice o misto). Questi numeri vengono chiamati razionali. Ci sono, però, numeri diversi dai razionali , cioè che non sono originati da alcuna frazione (si pensi a $\sqrt{2}$, misura della diagonale di un quadrato di lato 1).
Questi ultimi si chiamano irrazionali (che non provengono da nessuna divisione di numeri interi quali sono il numeratore e il denominatore di una frazione).
L'insieme dei numeri razionali e irrazionali costituiscono l'insieme dei numeri reali e quest'ultimo viene indicato col simbolo $\mathbb{R}$; l'insieme dei numeri reali copre tutti i punti di una linea retta senza lacune (perciò è detto continuo).

Il numero uno è detto l'unità dei numeri reali. La radice quadrata di un numero negativo, per definizione, non è un numero reale, perché il quadrato di un numero reale è sempre positivo. Ma spessissimo abbiamo a che fare con i numeri negativi che appaiono sotto il segno di radice quadrata, anche se il risultato finale è un numero reale. Bisogna, dunque, ovviare a questo inconveniente. A tal fine si definisce una nuova classe di numeri detti numeri immaginari.

5.1. Numeri immaginari

Sia la seguente

Definizione **Si definisce *unità immaginaria*, e viene indicata col simbolo i, la quantità** $\sqrt{-1}$.

Dunque ,per definizione $\sqrt{-1} = i$.
Tale unità i è diversa dall'unità 1 dei numeri reali .
Tuttavia in base alla definizione le due unità sono legate dalla relazione

$$i^2 = -1$$

I numeri reali moltiplicati per **i** danno luogo a nuovi numeri detti immaginari. In altre parole se a $\in \mathbb{R}$ allora a moltiplicato per i è un numero immaginario . Attenzione però ,moltiplicando ancora per i un numero immaginario si torna alla classe dei numeri reali.

$$ai \times i = ai^2 = a(-1) = -a$$

Sia ,ora, l'altra

Definizione **Si dice *numero complesso* una scrittura del tipo $a + bi$ oppure $a - bi$ nella quale a è un numero reale e bi un numero immaginario**.

E' utile sottolineare che il simbolo + (o il simbolo -) non ha il significato di addizione algebrica. La giustificazione dell'uso di tale simbolo sta nel fatto che le quattro operazioni fondamentali coi numeri complessi sono così definite da potersi eseguire mediante le regole dell'algebra dei numeri reali.
Invero, dati due numeri complessi a + bi e c + di

- la loro somma

$$a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

è ancora un numero complesso ;

- il loro prodotto (ricordando che $i^2 = -1$)

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi})\, \boldsymbol{x}\, (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{di}) = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{adi} + \boldsymbol{bci} + \boldsymbol{bdi2} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{adi} + \boldsymbol{bci} - \boldsymbol{bd}$$
$$= (\boldsymbol{ac} - \boldsymbol{bd}) + (\boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc})\boldsymbol{i}$$

è ancora un numero complesso .

<u>Definizione</u> Due numeri *complessi* si dicono *coniugati* quando hanno la stessa parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di segno opposto .

In altre parole due numeri complessi coniugati sono della forma

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi} \;\; e \;\; \boldsymbol{a} - \boldsymbol{bi}$$

<u>Definizione</u> Si dice *modulo* o *valore assoluto* (a volte anche *dimensione*) di un numero complesso la quantità reale

$$|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$$

dove $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$ (oppure $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{bi}$) .

5.2. <u>Rappresentazione cartesiana dei numeri complessi</u>

E' possibile rappresentare i numeri complessi i11 un opportuno sistema di riferimento cartesiano, nel quale sull'asse orizzontale si riportano le unità della parte reale e sull'asse verticale quelle immaginarie (vedi fig.13).

fig.13

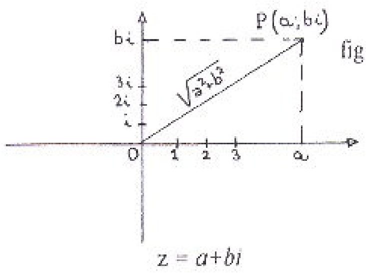
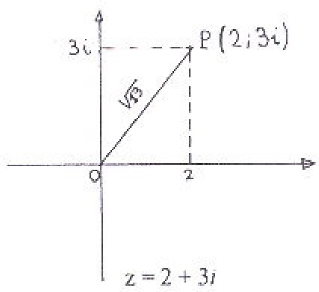


fig.14



In pratica il simbolo dell'unità immaginaria i viene sottinteso (vedi fig. 14).
La distanza del punto del piano cartesiano così individuato dall'origine è il modulo (o dimensione) del numero complesso. L'insieme dei punti corrispondenti ai numeri complessi costituisce il cosiddetto ***PIANO IMMAGINARIO*** o di ***GAUSS***.