Numeri perfetti

Sia la seguente

Definizione
Un numero si dice perfetto se è uguale alla somma dei suoi divisori, escluso se stesso.

Esempio: il numero 6 è perfetto perché 6=1+2+3.

Fra Luca Pacioli (1447-1517), un religioso, matematico ed economista italiano, autore della *"Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita"* e della *"Divina Proportione"*, scrisse a proposito dei numeri perfetti:

"Ancora si comme fra la gente più imperfecti e tristi che buoni e perfecti si trovano e li buoni sono pochi e rari: così fra li numeri pochi e rari sono li perfecti e molti e assai sonno li imperfecti: cioè superflui e diminuiti"

Non si conoscono molti numeri perfetti né si sa se sono infiniti. C'è una vasta letteratura matematica che parla dei numeri perfetti. Di essi qui propongo alcune proprietà, fra le tante.

Gli antichi greci erano affascinati da questi strani numeri, ne conoscevano i primi quattro: 6, 28, 496, 8128. Il 6 è il più piccolo numero perfetto. Infatti:

6=1+2+3

28=1+2+4+7+14

496=1+2+4+8+16+31+62+124+248

8128=1+2+4+8+16+32+64+127+254+508+1016+2032+4064

Euclide osservò che questi quattro numeri perfetti, allora conosciuti, possono essere scritti nella forma seguente:

$6 = 2 \times 3 = 2 \times (4 - 1) = 2^1 \times (2^2 - 1) = 2^{2-1} \times (2^2 - 1)$

$28 = 4 \times 7 = 4 \times (8 - 1) = 2^2 \times (2^3 - 1) = 2^{3-1} \times (2^3 - 1)$

$496 = 16 \times 31 = 16 \times (32 - 1) = 2^4 \times (2^5 - 1) = 2^{5-1} \times (2^5 - 1)$

$8128 = 64 \times 127 = 64 \times (128 - 1) = 2^6 \times (2^7 - 1) = 2^{7-1} \times (2^7 - 1)$

All'interno delle ultime parentesi gli esponenti del 2 sono 2, 3, 5, 7 che sono tutti numeri primi; anche 3, 7, 31, 127 (il secondo fattore di ciascuno) sono numeri primi.

Ciò gli suggerì che:

Se p è un numero primo e, a sua volta $2^p - 1$ è sempre primo, allora $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ è un numero perfetto.

(Elementi, Libro 9, Proposizione 36)

Oggi lo possiamo dimostrare col principio di induzione completa:

1. Per p = 2 si ha $2^2 - 1 = 3$ che è primo; infatti $(2^2 - 1) \cdot 2 = 6$, e 6 è numero perfetto.
2. Supponiamo che è vero per p;
3. Si dimostra che è vero per p + 1

   Infatti $(2^{p+1} - 1) \cdot 2^p = (2^p \cdot 2 - 1) \cdot 2^p = (2^p \cdot 2 - 1) \cdot 2^{p-1} \cdot 2$

Notiamo che il numero 2 è all'origine dei numeri perfetti.

Dobbiamo arrivare al XV secolo quando venne trovato, da un matematico sconosciuto, il **quinto numero perfetto**: **33.550.336**.

Il **sesto** e il **settimo numero perfetto** vennero scoperti da **Pier Antonio Cataldi** (1548 - 1626):
8.589.869.056 e
2.305.843.008.139.952.128

Il settimo numero perfetto presenta ben **19 cifre**!

Ad oggi si sa che tutti i numeri perfetti sono pari, la cui cifra delle unità è 6 oppure 8. Non è stato scoperto alcun numero perfetto dispari.

Una curiosità:
Si può dimostrare che ogni numero perfetto, tranne il 6, è uguale a somme di successioni dei numeri dispari al cubo.
Vediamo:
$28 = 1^3 + 3^3$ (due cubi)
$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$ (quattro cubi)
$8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3$ (otto cubi)

Anche qui il 2 gioca un ruolo: il 28 è fatto di due cifre, quindi è uguale alla somma di $2^{2-1} = 2^1 = 2$ cubi; 496 è fatto di tre cifre, quindi è uguale alla somma di $2^{3-1} = 2^2 = 4$ cubi; 8128 è fatto di quattro cifre, quindi è uguale alla somma di $2^{4-1} = 2^3 = 8$ cubi.

Altra curiosità:
La somma dei reciproci di tutti i divisori di un numero perfetto, compreso il reciproco del numero stesso, è uguale a 2. Per i reciproci dei divisori del numero 28 si ha:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = 2$$

Da quanto detto fin qui, appare evidente che i numeri perfetti sono legati ai numeri primi della forma $2^p - 1$ (si dia un'occhiata all'articolo I primi di Lucas-Lehemer, nella sottocategoria dei Numeri primi, in questo stesso sito).

Per esempio, nel natale del 2018 fu scoperto il numero primo più grande fino ad allora:
$2^{82589933} - 1$.
Allora, $(2^{82589933} - 1) \cdot 2^{82589933}$ fu il numero perfetto più grande.
Riporto una bella affermazione di David Hilbert (1862-1943), matematico tedesco.

"*Un problema di teoria dei numeri è senza tempo come un'opera d'arte*."