Numero polo

Dato un numero di n cifre (con n che va da 2 a 5) tutte diverse tra loro, se ne scrive il rovescio (cioè dall'ultima cifra alla prima). Si fa la differenza tra il più grande e il più piccolo. Il risultato bisogna che sia ancora di n cifre; in caso contrario si cambia il numero n di partenza. Al numero che esprime la differenza si addiziona il suo rovescio. Il risultato finale è costante, qualsiasi sia il numero n. Tale costante viene detto **Numero Polo**.

Il numero polo dei numeri a due cifre è 99.

Esempio:
Sia n=84, il suo rovescio è 48. La differenza 84-48=36. La somma tra 36 e il suo rovescio 63 è: 36+63=99.

Numero polo dei numeri a tre cifre

Dato un numero **n** di tre cifre, se ne scrive il rovescio. Si effettua la sottrazione fra i due (dal più grande si sottrae quello più piccolo). Condizione: il risultato deve essere ancora un numero di tre cifre, in caso contrario si cambia il numero **n**. Al risultato ottenuto si addiziona il suo rovescio. Il risultato finale è costante, qualsiasi sia il numero n, e vale **1089**.

Esempio:
sia n = 248, il rovescio è 842 per cui 842 – 248 = 594, il cui rovescio è 495. Allora 594 + 495 = 1089.

Si propone una dimostrazione, generalizzando. Un numero di tre cifre in forma polinomiale si scrive

$$100x + 10y + z.$$

Il suo rovescio è

$$100z + 10y + x.$$

Si possono avere due casi:
1) $x > z$;
2) $x < z$.

Supponiamo, per fissare le idee, che $x > z$. Perciò **n** si scrive

$$100x + 10y + z > 100z + 10y + x.$$

Allora:

$$100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 100x + 10y + z - 100z - 10y - x = 99(x - z)$$

Siano, ora, le seguenti considerazioni:
Da $x > z$ segue che $x - z > 0$; ora $(x - z)$ è un numero che non può essere uguale a uno perché in tal caso $99(x - z) = 99$, che è un numero a due cifre, mentre, per la dimostrazione, occorre che sia un numero di tre cifre. Pertanto $(x - z)$ è un numero che va da 2 a 9. Osservo che $99(x - z)$ è un numero a tre cifre dove la seconda cifra è sempre 9 mentre la prima cifra sommata alla terza dà 9, cioè la prima cifra è complementare a 9 della terza (e viceversa).
Di qui posso scrivere:

$$99(x - z) = 100x' + 10\cdot 9 + (9 - x') \qquad (1)$$

e di questo scrivo il rovescio:

$$100(9 - x') + 10\cdot 9 + x' \qquad (2)$$

Faccio la somma tra la (1) e la (2):

$$100x' + 90 + 9 - x' + 900 - 100x' + 90 + x' = \mathbf{1089} \qquad (3)$$

Analogo ragionamento si ha se $x < z$.

<u>Numero polo dei numeri a quattro cifre</u>

Provate a trovare il numero polo dei numeri di quattro cifre (tutte diverse!). Attenzione: la differenza tra il numero di partenza e il suo rovescio deve essere ancora un numero di quattro cifre, non necessariamente tutte diverse.
Ebbene, scoprirete che di risultati possiamo averne due: il numero **10890** oppure **9999**.

Esempi:
Sia n=9874,
il rovescio è 4789.
La differenza tra i due numeri, tra il più grande e il più piccolo, è
9874-4789=5085
E il rovescio di 5085 è 5805.
Allora, la somma fra i due è
5085+5805=**10890**.

Sia, ora, n=4681,
il rovescio è 1864.
La differenza tra il più grande e il più piccolo è
4681-1864=2817,
il cui rovescio è
7182.
La somma fra questi ultimi è
2817+7182=**9999**.

Come facciamo a sapere se è il numero polo è10890 oppure 9999?
Ebbene, se le differenze tra l'ultima cifra e la prima e tra la terza e la seconda sono numeri
1) **CONCORDI** (nel senso che hanno lo stesso segno, entrambi positivi o negativi) allora il numero polo è **10890**;
2) **DISCORDI** (nel senso che hanno segno diverso, uno positivo e l'altro negativo) allora il numero polo è **9999**.

Infatti, nel primo esempio di sopra, per il numero 9874 la differenza tra l'ultima cifra 4 e la prima 9 è 4-9=-5 numero negativo; la differenza tra la terza cifra 7 e la seconda 8 è 7-8=-1 numero pure negativo. Dunque le due differenze sono numeri concordi. Pertanto il numero polo è 10890.
Inoltre, osserviamo che la differenza tra 9874 e il suo rovescio 4789 è 9874-4789=5085.
In quest'ultimo la prima cifra 5 e l'ultima 5 sono complementari a 10 (5+5=10), mentre la **seconda cifra** 0 e la **terza** 8 **sono complementari a 8** (0+8=8).

Nel secondo esempio, per il numero 4681 la differenza tra l'ultima cifra 1 e la prima 4 è 1-4=-3 numero negativo; la differenza tra la terza cifra 8 e la seconda 6 è 8-6=2 numero positivo. Dunque le due differenze sono numeri discordi. Pertanto il numero polo è 9999.
Qui osserviamo che la differenza tra 4681 e il suo rovescio 1864 è 4691-1864=2817.
In quest'ultimo la **prima cifra** 2 e **l'ultima** 7 **sono complementari a 9** (2+7=9), mentre la **seconda cifra** 8 e la **terza** 1 **sono pure complementari a 9** (8+1=9).
<u>Queste informazioni tornano molto utili nella dimostrazione seguente.</u>

Dimostriamo l'esistenza di due numeri poli per i numeri di 4 cifre, che sono 9999 e 10890.

Partiamo dallo scrivere in forma polinomiale un numero di 4 cifre; si ha:

$$u + 10d + 100c + 1000m$$

dove u sono le unità, d le decine, c le centinaia e m le migliaia.
Procediamo sottraendo il suo inverso:

$$u + 10d + 100c + 1000m - m -10c - 100d - 1000u=999m-999u+90c-90d$$

Eseguendo i calcoli, e non conoscendo quale dei due numeri (scritti in forma polinomiale) è maggiore rispetto all'altro, dobbiamo fare ricorso al valore assoluto della differenza per cui si ha:

$$| 999 (m – u) + 90 (c – d) | \qquad (4)$$

La (4) rappresenta infatti la differenza tra un numero di 4 cifre e il suo inverso.
Per comodità indichiamo (m – u) con s e (c – d) con t, per cui la (4) si scrive

$$| 999 s + 90 t | \qquad (5)$$

Sappiamo che s e t rappresentano numeri interi compresi nell'intervallo [-8; 8].
Si possono avere i seguenti casi:

- Se **s** e **t sono** entrambi positivi, oppure entrambi negativi, cioè **concordi** nel segno, si ottiene sempre un numero di 4 cifre in cui le cifre intermedie, **seconda e terza**, **sono complementari a 8**, e le cifre esterne**, prima e ultima**, **complementari a 10**.
- Se **s** e **t sono discordi** si ottiene ancora un numero di 4 cifre in cui **sia le cifre intermedie sia le cifre esterne, prima ed ultima, sono complementari a 9.**

Quindi la (4) può esprimere un numero in cui le cifre intermedie siano complementari a 8 e le cifre esterne siano complementari a 10. Oppure sia le cifre intermedie sia le cifre esterne siano complementari a 9.

Di conseguenza possiamo riscrivere la (4) nel seguente modo:

$$(10 – f) + 10 (8 – g) + 100g + 1000f \qquad (6)$$

dove f indica la cifra delle migliaia, g la cifra delle centinaia.
Oppure:

$$(9 – p) + 10 (9 – q) + 100q + 1000p \qquad (7)$$

Dove, qui, p indica la cifra delle migliaia, q la cifra delle centinaia.

Se alla (6) sommiamo il suo rovescio e si eseguono i calcoli, si ottiene:

$$(10 – f) + 10 (8 – g) + 100g + 1000f + f + 10g + 100 (8 – g) + 1000 (10 – f) =$$
$$=10 – f + 80 – 10g + 100g + 1000f + f + 10g + 800 – 100g + 10000 – 1000f = \mathbf{10890}$$

Procedendo analogamente per la (7), si ottiene:

$$(9 – p) + 10 (9 – q) + 100q + 1000p + p + 10q + 100 (9 – q) + 1000 (9 – p) =$$
$$=9 – p + 90 – 10q + 100q + 1000p + p + 10q + 900 – 100q + 9000 – 1000p = \mathbf{9999}$$

Ricapitolando, si ha la seguente regola:

Se le differenze tra l'ultima cifra e la prima, e tra la terza e la seconda sono numeri
1) **CONCORDI** allora il numero polo è **10890**;
2) **DISCORDI** allora il numero polo è **9999**.

<u>Numero polo dei numeri a cinque cifre</u>

Anche per i numeri a cinque cifre ci sono due numeri polo: il **109890 e il 99099**. Per sapere a priori quale dei due sarà il numero polo, applichiamo la regola di cui sopra per i numeri a quattro cifre.

Tralasciando la cifra centrale, se le differenze tra l'ultima cifra e la prima e tra la quarta e la seconda sono numeri
1) **CONCORDI** allora il numero polo è **109890**;
2) **DISCORDI** allora il numero polo è **99099**.

Esempi

Sia n=68423. La differenza tra l'ultima cifra 3 e la prima 6 è 3-6=-3, negativa; mentre la differenza tra la quarta cifra 2 e la seconda 8 è 2-8=-6, negativa. Le due differenze sono numeri entrambi negativi e quindi **concordi** nel segno. Il numero polo è, allora, 109890. Infatti, il rovescio del numero di partenza 68423 è 32486. La differenza fra i due è 68423-32486=35937 che sommato al suo rovescio 73953 dà come numero polo 109890.

Sia, ora n=27546. La differenza tra l'ultima cifra e la prima è 6-2=4, positiva; mentre la differenza tra la quarta cifra e la seconda è 4-7=-3, negativa. Le due differenze sono numeri **discordi** nel segno. Il numero polo è, allora, 99099. Infatti, il rovescio del numero di partenza 27546 è 64572. La differenza fra i due è 64572-27546=37026 che sommato al suo rovescio 62073 dà come numero polo 99099.

<u>NOTA</u>

Ci si può continuare a divertire con numeri a sei cifre ed oltre, applicando la stessa regola con l'accortezza che

- se il numero delle cifre è pari e le differenze delle cifre di posto simmetrico (ultima e prima, penultima e seconda e cosi via) sono concordi, allora si ha un numero polo; altrimenti, se sono discordi, si ha un altro numero polo;
- se il numero delle cifre è dispari, si trascura la cifra centrale e si procede con le differenze delle cifre di posto simmetrico: se esse sono tutte concordi allora si ha un numero polo, altrimenti si ha un altro numero polo.