RADICALI

Prima di passare allo studio dei radicali è opportuno tenere presente il seguente teorema fondamentale sui numeri reali di cui si omette la dimostrazione.

Siano ***x*** e ***y*** due numeri reali non negativi (cioè positivi o nulli), sia ***n*** un numero intero positivo. Si ha che *x* e *y* sono uguali se e solo se sono uguali le loro potenze con esponente *n*.

In simboli

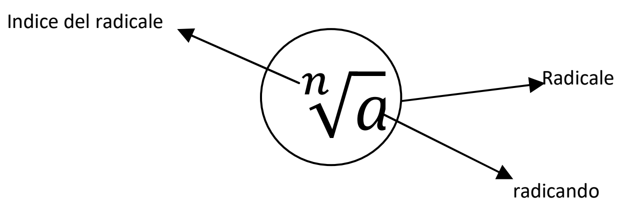
$$\boldsymbol{x = y \Leftrightarrow x^n = y^n}$$

Sia *n* un numero intero positivo, sia *a* un numero reale. Si ha la seguente

Definizione: Si dice radice *n*-esima di *a* quel numero reale *x* tale che

$$\boldsymbol{x^n = a}$$

Il numero *x* viene indicato con il simbolo $\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$ che viene detto **radicale**, mentre **a** si dice **radicando** ed ***n*** l'**indice del radicale**.



Dunque, per definizione si ha:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a}$$

Dalla definizione risultano le seguenti considerazioni:

1. *n*=1 $\Rightarrow$ $\sqrt[1]{a} = a$ perché $a^1 = a$;
2. *n*=2 $\Rightarrow$ al posto di $\sqrt[2]{a}$ si scrive $\sqrt{a}$ sottintendendo l'indice 2. Vale a dire che 2 è l'indice più basso perché si possa parlare di radicale. In questo caso si dice ***radice quadrata*** di *a;*
3. *n*=3 $\Rightarrow$ $\sqrt[3]{a}$ e si legge ***radice cubica*** di *a*.

Inoltre, per

- *n* > 0 e *a* = 0 si ha $\sqrt[n]{0} = 0$ perché $0^n = 0$;

Mentre per

- *n* = 0 e *a* ≠ 0 si ha che il simbolo $\sqrt[0]{a}$ è privo di significato;

Quando il radicando è una potenza, cioè è della forma a^m , allora *m* si dice esponente del radicando.
Il radicale si dice **irriducibile** se l'indice n del radicale e l'esponente m del radicando sono primi tra loro.
L'operazione con la quale si passa dal numero *a* al numero $\sqrt[n]{a}$ si dice **estrazione di radice *n*-esima.**

Esempio

Dal numero 27 si vuole passare al numero $\sqrt[3]{27}$:

$$\sqrt[3]{27} = 3 \text{ perché } 3^3 = 27$$

Dunque 3 è la radice di indice 3 di 27.

Da quanto detto discendono le seguenti relazioni:

4. $\boldsymbol{(\sqrt[n]{a})^n = a}$

Infatti, posto $\sqrt[n]{a} = x$ segue che $(\sqrt[n]{a})^n = x^n$. Ma da $\sqrt[n]{a} = x$ segue per definizione che $x^n = a$ e quindi

$$(\sqrt[n]{a})^n = x^n = a$$

5. $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^n} = a}$

Infatti, posto $\sqrt[n]{a^n} = x$ segue per definizione che $x^n = a^n$ da cui, per il teorema fondamentale sui numeri reali, $x = a$ e quindi

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Dalla 4. e dalla 5. Segue

6. $\boldsymbol{(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a}$
7. Una potenza con esponente una frazione, per definizione, viene assunta come un radicale:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Osservazioni importanti

I. Da **a** numero positivo si ha che anche $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}}$ è numero positivo;

II. L'elevamento a potenza di un numero reale positivo non gode della proprietà commutativa, cioè $a^n \neq n^a$; da ciò segue che **l'elevamento a potenza ha due operazioni inverse**:

II.1 L'estrazione di radice: da a^n , per calcolare *a,* si ha $\sqrt[n]{a} = x \Longrightarrow x^n = \boldsymbol{a}$;

II.2 Il passaggio al "logaritmo": da a^n, per calcolare *a,* $\log_b a = x \Longrightarrow b^x = \boldsymbol{a}$***;***

III. Se il radicando è un'espressione letterale (e quindi variabile) si hanno i due seguenti casi:

III.1 Se l'indice n è un numero PARI allora è necessario stabilire per quali valori delle lettere che vi compaiono esso è positivo o nullo.
In altre parole bisogna porre il radicando ≥ 0 e risolvere la disequazione.
L'insieme di questi valori viene detto ***Insieme di Esistenza,*** mentre le condizioni rispettate dalle lettere affinché i radicali non perdano di significato vengono dette ***Condizioni di Esistenza*** (***C.E***.).

III.2 Se l'indice n è DSPARI allora non ci si deve preoccupare del segno del radicando.

PROPRIETÀ E OPERAZIONI CON I RADICALI

Siano $n, m, p \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $a, b \in \mathbb{R}^+$. Si hanno le seguenti proprietà:

8. **Prodotto** di radicali aventi lo stesso indice

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{b}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}$$

Esempio: $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{2 \cdot 3} = \sqrt[5]{6}$

9. **Quoziente** di radicali aventi lo stesso indice

$$\frac{\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}}{\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}} = \sqrt[n]{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}$$

Esempio: $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$

10. **Radice** di un radicale

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[n \cdot m]{\boldsymbol{a}}$$

Esempio: $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3 \cdot 2]{5} = \sqrt[6]{5}$

11. Proprietà **invariantiva**

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}} = \sqrt[n \cdot p]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{p}}}$$

Esempio: $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4 \cdot 2]{x^{3 \cdot 2}} = \sqrt[8]{x^6}$

12. Portare un fattore c positivo dentro il segno di radice

$$\boldsymbol{c} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{a}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{n}}} \; con \; c > 0$$

Esempio: $\frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

13. Portare un fattore c fuori dal segno di radice

Sia dato $\sqrt[n]{a^m}, con\ m \geq n$. Indicati con q e con r rispettivamente il quoziente e il resto della divisione di m per n, cioè $m = n \cdot q + r$, si ha

$$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{nq}} \cdot \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{r}}} = \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{nq}}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{r}}} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{q}} \cdot \sqrt[n]{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{r}}}$$

Esempio: $\sqrt[5]{x^{13}} = x^2 \sqrt[5]{x^3}$, essendo *q=2* e *r=3* (13 diviso 5 dà 2 come quoziente e resto 3).