SERIE

Siano le seguenti definizioni:

Considero la successione

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \in \mathbb{R}$$

di numeri reali.

<u>Definizione 1</u>

Si dice SERIE numerica la scrittura

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

La (1) ha un significato diverso dalla somma ordinaria.

Volendo dare un significato più preciso alla (1) procedo cosi:

indico con

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Ottenendosi, cosi, dei nuovi termini che vengono chiamati ***somme parziali***.

Considero la nuova successione delle somme parziali

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots \qquad (2)$$

Si hanno le ulteriori

<u>Definizione 2</u>

La serie (1) si dice CONVERGENTE se

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = s \, , con\ s\ finito$$

s si dice valore o somma della serie e si scrive, convenzionalmente

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

<u>Definizione 3</u>

La serie (1) si dice DIVERGENTE se

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \infty \begin{cases} \nearrow +\infty & \text{(positivamente divergente)} \\ \searrow -\infty & \text{(negativamente divergente)} \end{cases}$$

Definizione 4

La serie (1) si dice INDETERMINATA (o anche oscillante) se lo è anche la successione (2), se cioè non esiste Il limite della successione delle somme parziali.

SERIE DI POTENZE

Considero la successione di numeri reali

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{R}$$

Allora, per $x \in \mathbb{R}$, si abbia

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots = s$$

Tale scrittura si dice SERIE di POTENZE nella variabile x.

I numeri $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ si dicono coefficienti della s.

SERIE DI MAC-LAURIN (matematico scozzese, 1698-1746)

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno I del punto 0 (zero) e supponiamo che in I la $f(x)$ ammetta derivate di qualsiasi ordine. Costruisco i coefficienti numerici nel modo seguente:

$$a_0 = f(0),\ a_1 = f'(0),\ a_2 = \frac{f''(0)}{2!},\ a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \dots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \dots$$

Allora

Definizione 5

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

si dice SERIE di POTENZE di MAC-LAURIN relativa alla funzione $f(x)$.

Se poi

Definizione 6

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Allora si dice che la funzione $f(x)$ è sviluppabile in serie di Mac-Laurin.

Adesso siamo pronti per affermare che le seguenti funzioni

a) $y = e^x$
b) $y = \sin(x)$
c) $y = \cos(x)$

sono sviluppabili in serie di Mac-Laurin.

Infatti, per la a) si ha:

$$f(0) = e^0 = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1 \quad \text{e cosi via, per cui}$$

$$a_0 = 1, a_1 = f'(0)x = x, a_2 = \frac{f''(0)}{2!}x^2 = \frac{x^2}{2!} \text{ e cosi } a_3 = \frac{x^3}{3!}, \dots a_n = \frac{x^n}{n!}, \dots$$

Per cui, ancora

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots}$$

In particolare, per $x = 1$ si ha

$$\boxed{e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots}$$

Per la b) si ha:

$$f'(sen(x)) = cosx, f''(sen(x)) = -sen(x), f'''\big(sen(x)\big) = -\cos(x) \quad \text{e cosi via}$$

$$a_0 = sen(0) = 0, a_1 = \cos(0) \cdot x = x, a_2 = -\frac{sen(0)}{2!}x^2 = 0, a_3 = -\frac{\cos(0)}{3!}x^3 = \frac{1}{3!}x^3, \dots, a_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n + \cdots$$

Quindi

$$\boxed{sen(x) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n + \cdots}$$

Mentre per la c) si ha:

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n + \cdots}$$

Osservo che lo sviluppo di $cosx$ si ottiene semplicemente derivando ambo i membri della

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

SERIE DI TAYLOR

Nel 1715 il matematico inglese Brook Taylor (1685-1731) pubblicò uno studio sulle serie di potenze. Dal suo nome si ha la cosiddetta "serie di Taylor" che consiste nell'approssimare una funzione, sotto determinate condizioni, in un suo punto x_0 con un polinomio di grado qualsiasi.

Più precisamente, si ha la seguente definizione per funzioni reali (ma si può estendere anche a funzioni complesse).

Definizione 6

Sia $f(x)$ una funzione numerica reale definita nell'intervallo (a,b) e sia x_0 un suo punto. Se $f(x)$ è derivabile infinite volte in x_0, allora la serie

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!}(x - x_0)^3 f'''(x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0)$$

Si dice **serie di Taylor** della funzione $f(x)$ di valore iniziale x_0 nel punto x.

Osservo che non tutte le funzioni sono sviluppabili in serie di Taylor; detto con parole diverse, vi sono funzioni che hanno la serie di Taylor che non è uguale alla funzione stessa.
Ci sono teoremi che, se verificati, ci dicono quando una funzione è sviluppabile in serie di Taylor.
Intanto, sia la seguente altra

Definizione 7

Si dice resto n+1-esimo, e si indica con $R_{n+1}(x)$, della serie di Taylor la differenza tra la funzione $f(x)$ e la sua serie di Taylor di punto iniziale x_0 troncata al termine n-esimo. Si scrive

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(x - x_0)^k f^{(k)}(x_0)$$

Siano, ora, i seguenti teoremi sulla convergenza alla funzione.

TEOREMA 1

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo (a,b); siano x e x_0 elementi di (a,b). La $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor se e solo se

$$\lim_{n \to \infty} R_{n+1} = 0$$

TEOREMA 2

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo (a,b); La $f(x)$ sia anche continua e derivabile infinite volte, e le derivate siano anch'esse continue in (a,b). Siano x e x_0 elementi di (a,b) con $x_0 < x$. Se esistono due numeri reali c ed L tali che, per ogni n intero non negativo, si abbia

$$\underset{(x_0, x)}{Sup} \ |f^n(x)| < c.L^n$$

Allora la $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 nel punto x.

Enunciamo l'ulteriore importante teorema

TEOREMA DI BERNSTEIN (Felix Bernstein matematico tedesco, 1878-1956)

Sia il punto iniziale $x_0 = 0$ e $f(x)$ una funzione numerica reale positiva o nulla, definita nell'intervallo (0,r) ed ivi continua e derivabile infinite volte, con le derivate tutte continue positive o nulle nello stesso intervallo (0,r).
Allora la $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale 0 nel punto $x \in (0, r)$ con $x \neq r$.

Ci sono, poi, le seguenti **formule sui resti** che ci aiutano a verificare i teoremi sopra riportati sulla convergenza.

RESTO DI LAGRANGE (Joseph-Louis Lagrange, matematico, italianissimo nato Giuseppe Luigi Lagrangia a Torino il 25 gennaio 1736 e morto a Parigi il 10 aprile 1813)

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. f^{(n+1)}(\xi)$$

dove ξ (lettera dell'alfabeto greco, si pronuncia xi) è un opportuno numero reale che appartiene all'intervallo (x_0, x).

RESTO DI CAUCHY (Augustin-Louis Cauchy, matematico ed ingegnere francese 1789-1857)

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n)!}(x - \xi)^n (x - x_0). f^n(\xi)$$

Esempi

1) Sia la funzione $y = sen(x)$ definita nell'intervallo (-1,1). In tale intervallo è derivabile infinite volte e continua. Lo sviluppo in serie di Taylor nel punto iniziale 0 è:

$$sen(x) = sen(0) + xcos(0) + \frac{x^2}{2!}\big(-sen(0)\big) + \frac{x^3}{3!}(-\cos(0)) + \cdots$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

2) Sia la funzione $y = cos(x)$ definita nell'intervallo (-1,1). In tale intervallo è derivabile infinite volte e continua. Lo sviluppo in serie di Taylor nel punto iniziale 0 è:

$$cos(x) = scos(0) + (x - sen(0)) + \frac{x^2}{2!}\big(-cos(0)\big) + \frac{x^3}{3!}(sen(0)) + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

3) Sia la funzione $y = e^x$ definita in tutto $\mathbb{R}$, dove è derivabile infinite volte e continua. Lo sviluppo in serie di Taylor nel punto iniziale 0 è:

$$e^x = e^0 + xe^0 + \frac{x^2}{2!}e^0 + \frac{x^3}{3!}e^0 + \cdots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$