SUI MASSIMI E SUI MINIMI: QUESTIONI NUMERICHE

MASSIMI

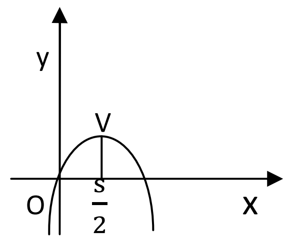
Proposizione 1. Se la somma di due numeri positivi x e y è costante ed uguale ad s, allora il loro prodotto è massimo quando essi sono uguali.
(La proposizione è equivalente a: il quadrilatero di area massima fra quelli equiperimetrici è il quadrato)

Ipotesi: $x+y=s$,
Tesi: $x \cdot y$ è massimo quando $x = y$.

Dimostrazione: Da $x+y=s$ segue $y=s-x$. Quindi il prodotto $x \cdot y$ può scriversi $x \cdot (s-x)$. Si ha la funzione

$$z = x \cdot (s-x) = -x^2 + sx$$

che esprime una parabola con la concavità rivolta verso il basso per cui il vertice è il punto di massimo ed ha ascissa $x = \frac{s}{2}$.



Perciò $y = s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2}$. Quindi $x = y = \frac{s}{2}$

Proposizione 2. Se la somma di due numeri positivi x e y è costante ed uguale ad s, il prodotto delle loro potenze ad esponenti positivi n e m è massimo quando i numeri sono proporzionali ai rispettivi esponenti.
(affermare che due numeri sono proporzionali ai rispettivi esponenti equivale ad affermare che $x:n = y:m \rightarrow \frac{x}{n} = \frac{y}{m}$)

Ipotesi: $x+y=s$,
Tesi: $x^n \cdot y^m$ è massimo se $\frac{x}{n} = \frac{y}{m}$.

Dimostrazione: Siano $n,m \in \mathbb{N}$. Intanto osservo che

$$\frac{\mathbf{x^n}}{\mathbf{n^n}} \cdot \frac{\mathbf{y^m}}{\mathbf{m^m}} = \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}}\right)^{\mathbf{m}} = \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} \cdots \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}} \cdots \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}}\right)$$

e

$$n \cdot \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} + \mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} + \cdots + \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}} + \cdots + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}} = \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}}\right) + \cdots + \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}}\right)$$

Inoltre

$$\mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} \ \ \textbf{per cui} \ \ \mathbf{x^n} = \mathbf{n^n} \cdot \frac{\mathbf{x^n}}{\mathbf{n^n}}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}} \ \ \textbf{per cui} \ \ \mathbf{y^m} = \mathbf{m^m} \cdot \frac{\mathbf{y^m}}{\mathbf{m^m}}$$

Pertanto

$$\mathbf{x^n} \cdot \mathbf{y^m} = \mathbf{n^n} \cdot \mathbf{m^m} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}} \cdots \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}}\right)$$

Poiché si vuole $\mathbf{x^n} \cdot \mathbf{y^m}$ massimo allora il membro a destra della precedente uguaglianza è massimo.
Quindi $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}}$ è massimo e $\mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} + \mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}}$ è costante. Per la proposizione precedente si ha

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{m}}.$$

MINIMI

Proposizione 3. Se il prodotto di due numeri positivi x e y è costante allora la loro somma è **minima** quando essi sono uguali.

Ipotesi: $x \cdot y = q$ (q costante),

Tesi: $x+y$ = è minima se $x = y$.

Dimostrazione. Si osservi che $(x+y)^2 = (x-y)^2+4xy$. Affinchè $(x+y)^2$ sia minimo, anche il secondo membro deve essere tale. Ma $x \cdot y$, e quindi 4xy, è costante per ipotesi per cui è sufficiente che sia minimo $(x-y)^2$. Di qui $x = y$.

Proposizione 4. Se il prodotto $x_1^a \cdot x_2^b \cdots x_n^y$ di n potenze di basi positive variabili e di esponenti positivi è costante, la somma delle basi è **minima** quando esse sono proporzionali ai rispettivi esponenti.

Ipotesi: $x_1^a \cdot x_2^b \cdots x_n^y = p$ (p costante),

Tesi: $x_1+x_2+\cdots+x_n$ è minima se $\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{b} = \cdots = \frac{x_n}{y}$.

Dimostrazione. Per semplificare consideriamo il caso di due potenze: se $x_1^a \cdot x_2^b = \text{cost.}$ allora x_1+x_2 è minima se $\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{b}$. Infatti

$$x_1+x_2 = a\cdot \frac{x_1}{a} + b\cdot \frac{x_2}{b} = \underbrace{\frac{x_1}{a} + \frac{x_1}{a} \cdots + \frac{x_1}{a}}_{\text{a volte}} + \underbrace{\frac{x_2}{b} + \frac{x_2}{b} \cdots + \frac{x_2}{b}}_{\text{b volte}} = \underbrace{\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right) + \cdots + \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right)}_{\text{(a+b) volte}}.$$

Ma $\left(\frac{x_1}{a}\right)^a \cdot \left(\frac{x_2}{b}\right)^b = \frac{x_1^a \cdot x_2^b}{a^a \cdot b^b}$ è costante per ipotesi, per la proposizione 3 si ha che $\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{b}$ e quindi la somma è minima.