Facciamo prima una ripetizione insieme.

Intanto un'equazione in due incognite di primo grado del tipo ax+by+c=0 si dice lineare perché esprime una retta; le due incognite la x e la y sono, appunto, di primo grado.
Si dice sistema di primo grado un insieme di due equazioni ciascuna di primo grado. Viene indicato cosi

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Risolvere un sistema significa trovare una coppia ordinata di numeri (x_0;y_0) che soddisfa entrambe le equazioni. La coppia ordinata di numeri trovata si dice **soluzione** del sistema.
Se esiste la soluzione il sistema si dice **determinato**; se non esiste si dice **impossibile**. Ma può capitare che di soluzioni ce ne sono tante (sono infinite), in tal caso il sistema si dice **indeterminato** .
Ci sono più metodi per risolvere un sistema:
1) metodo di **sostituzione**;
2) metodo di **eliminazione** (si dice anche di riduzione);
3) metodo del **confronto**;
4) metodo di **Cramer** (Gabriel Cramer, 1704-1754, matematico svizzero).

Vediamo un esempio di come risolvere un sistema
Sia il sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 3x - 4y + 7 = 0 \end{cases}$$

E risolviamolo con i tre metodi che abbiamo studiato:

1) metodo di sostituzione

a) da una delle due equazioni isoliamo (a piacere) una delle due incognite.Il valore trovato va sostituito nell'altra equazione. Poiché nella prima equazione la y ha coefficiente 1, conviene considerare la prima equazione e isolare in essa la y (non è una regola, è un procedimento più comodo)

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ 3x - 4y + 7 = 0 \end{cases}$$

b) sostituiamo la y cosi ottenuta nella seconda equazione

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ 3x - 4(-2x - 1) + 7 = 0 \end{cases}$$

c) risolviamo la seconda equazione dove compare una sola incognita, in questo caso la x

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ 3x + 8x + 4 + 7 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ 11x = -11 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ x = -\frac{11}{11} = -1 \end{cases}$$

d) il valore trovato della x viene sostituito nell'altra equazione

$$\begin{cases} y = -2(-1) - 1 = +2 - 1 = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

La coppia ordinata (-1;1) è la soluzione del sistema.

Facciamo la verifica, vediamo cioè se la coppia ottenuta (-1;1) soddisfa entrambe le equazioni. Sostituiamo x=-1 e y=1 in entrambe le equazioni nel sistema di partenza

$$\begin{cases} 2(-1) + 1 + 1 = 0 \\ 3(-1) - 4(1) + 7 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -2 + 2 = 0 \\ -3 - 4 + 7 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

. Il sistema è verificato; ciò vuol dire che la soluzione è proprio quella trovata (-1;1).

2) metodo di eliminazione. Consiste nell'eliminare prima la x e poi la y da entrambe le equazioni. Per fare ciò dobbiamo rendere uguali i coefficienti prima della x e poi della y in entrambe le equazioni del sistema.

Seguiamo lo schema qui sotto riportato.

Fissiamo l'attenzione sulla x. Nella prima equazione il suo coefficiente è 2, nella seconda equazione il suo coefficiente è 3.

Moltiplichiamo tutti i termini della seconda equazione per 2 e tutti i termini della prima equazione per 3 in modo da rendere i due coefficienti della x uguali (vedi passaggi in (a)).

Analogamente facciamo per la y: nella prima equazione il suo coefficiente è 1, nella seconda equazione il suo coefficiente è -4.

Moltiplichiamo tutti i termini della seconda equazione per 1 e tutti i termini della prima equazione per -4 in modo da rendere i due coefficienti della y uguali (vedi passaggi in (b)).

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ 3x-4y+7=0 \end{cases}$$

(a)

$$\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ 3x-4y+7=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x+3y+3=0 \\ 6x-8y+14=0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{matrix} -4 \\ 1 \end{matrix}\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ 3x-4y+7=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -8x-4y-4=0 \\ 3x-4y+7=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x+3y+3-(6x-8y+14)=0 \\ -8x-4y-4-(3x-4y+7)=0 \end{cases}$$

In questo modo nella prima equazione compare solo la ty e nella seconda solo la x. Facendo i calcoli si ha

$$\begin{cases} \cancel{6x}+3y+3\cancel{-6x}+8y-14=0 \\ -8x\cancel{-4y}-4-3x\cancel{+4y}-7=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 11y-11=0 \\ -11x-11=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 11y=11 \\ -11x=11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

Stesso risultato di prima, quindi giusto.

3) <u>metodo di Cramer</u>. Bisogna fare ricorso ai determinanti del tipo 2x2 (due righe e due colonne).

Riscriviamo il sistema, portando al secondo membro di ciascuna equazione il termine noto:

$$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ 3x-4y=-7 \end{cases}$$

Calcoliamo il <u>determinante dei coefficienti</u> delle incognite che indichiamo con Δ (delta maiuscolo dell'alfabeto greco)

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=(2)\cdot(-4)-(1)\cdot(3)=-8-3=-11$$

Calcoliamo il <u>determinante relativo alla x</u> che indichiamo con Δ_x

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-4)-(1)\cdot(-7)=4+7=11$$

Calcoliamo il <u>determinante relativo alla y</u> che indichiamo con Δ_y

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}=(2)\cdot(-7)-(-1)\cdot(3)=-14+3=-11$$

Ora ricaviamo i valori delle incognite

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{11}{-11}=-1$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-11}{-11}=1$$

Di nuovo la stessa soluzione, quindi ilo procedimento è corretto.