Studio di una funzione

Sia y=f(x) una funzione. Per studiare e tracciare il grafico di una funzione seguiamo i punti sotto elencati:

1) Trovare il dominio . Il dominio d'ora in avanti sarà indicato con D. E' bene ricordare che $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}$. A seconda della natura di f, bisogna tenere conto di quanto segue:

1.1) Se f è fratta, si pone il denominatore diverso da zero ($\neq$0);

1.2) se f contiene il logaritmo, allora l'argomento del logaritmo deve essere maggiore di zero (>0), in particolare

1.2.1) se la base del logaritmo è un numero, l'argomento deve essere maggiore di zero (>0);

1.2.2) se la base dipende dall'incognita, allora essa va posta maggiore di zero e diversa da 1 (>0 e $\neq$1)

1.3) se la f è con radici di indice

1.3.1) PARI, si pone il radicando $\geq$0;

1.3.2) DISPARI, nessuna condizione va posta e il $\mathrm{D} = \mathbb{R}$;

1.4) se la f è y=arcosen(f(x)) oppure y=arcocosen(f(x)), si pone l'argomento tra -1 e +1 (doppia disequazione)

1.5) se la f è esponenziale con base

1.5.1) fissa (del tipo $a^{f(x)}$), non si pone nessuna condizione e $\mathrm{D} = \mathbb{R}$;

1.5.2) variabile (del tipo $[f(x)]^{g(x)}$), si pone la base f(x) >0;

Una considerazione importante: la ricerca del dominio deve riguardare la funzione cosi come è scritta, senza modificarla con eventuali semplificazioni. Una volta determinato il dominio, allora la possiamo eventualmente semplificarla perché si sa dove essa è definita.

2) Eventuali simmetrie della f.

2.1) se f(-x) = f(x) allora la f è PARI, cioè è simmetrica rispetto all'asse delle y;

2.2) se f(-x) = -f(x) allora la f è DSPARI, cioè è simmetrica rispetto all'origine degli assi;

Sapere che la f è simmetrica è importante perché la si può studiare solo nell'intervallo (0;+∞) e poi simmettrizzarla. Inoltre l'informazione che una f possa essere simmetrica ci viene data da come è il dominio.

Esempi di domini di funzioni simmetriche:

$D = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty);$
$D = (-1; +1);$
$D = (-\infty; -3) \cup (+3; +\infty);$

3) Intersezione con gli assi

3.1) con l'asse delle y di equazione x=0: $\begin{cases} x = 0 \\ y = f(0) \end{cases};$

3.2) con l'asse delle x di equazione y=0: $\begin{cases} y = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$;

4) Studiare il segno di f. Si pone f(x)>0 e si considerano solo le soluzioni che sono nel dominio. E' chiaro che vanno considerati anche gli intervalli in cui f(x)<0,l disequazione che non va risolta perché le sue soluzioni son il complementare dell'altra f(x)>0;

5) Studio di f negli estremi del dominio e la ricerca di eventuali asintoti. Si tratta di valutare il comportamento di f in corrispondenza di essi. Non è male sottolineare il fatto che se f è fratta, allora gli eventuali zeri del denominatore, che sono anche estremi del dominio perché da questo esclusi, costituiscono gli asintoti verticali.

In particolare, per gli asintoti si hanno:

5.1) Asintoto orizzontale: è del tipo y=y_0 dove y_0 = $\lim_{x\to\infty} f(x)$, sempre che y_0 sia finito.

Si precisa che

5.1.1) per $\lim_{x\to+\infty} f(x) = h,\ h \in \mathbb{R}$, si ha che y=h è asintoto orizzontale destro;

5.1.2) per $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$, si ha che y=k è asintoto orizzontale sinistro;

5.1.1) per $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$, si ha che y=c è asintoto orizzontale semplicemente;

5.2) Asintoto verticale: è del tipo x=x_0 e si ottiene se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, dove il punto di accumulazione x_0 è uno zero del denominatore, cosi come si è detto più sopra;

5.3) Asintoto obliquo: è del tipo y=mx+q dove

m = $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ e q = $\lim_{x\to\infty}[f(x) - mx]$.

Osservo, inoltre, che è possibile un asintoto orizzontale intersechi il grafico di f in uno o più punti.

Per l'asintoto obliquo, invece, vale quanto segue: nel caso in cui uno dei due limiti $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

oppure $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ risulti essere ∞, allora si può proseguire nella ricerca dell'asintoto obliquo.

6) Studio della derivata prima, ossia ricerca degli intervalli in cui la f è crescente oppure decrescente.

Ricerca dei punti di massimo e di minimo. Si tratta anche di determinare il dominio della derivata prima in modo da restringere lo studio di punti di non derivabilità della funzione. In questi punti si studia l'andamento del rapporto incrementale (e non della derivata) calcolandone il limite da destra e da sinistra. In tal modo abbiamo sia il dominio della derivata prima sia gli eventuali punti di non derivabilità.

Si pone $f'(x) \geq 0$ e si risolve la disequazione. Negli intervalli in cui risulta $f'(x) > 0$ la funzione è strettamente crescente, negli intervalli in cui $f'(x) < 0$ la funzione è strettamente decrescente. I punti in cui la funzione cambia da crescenza a decrescenza sono di massimo o di minimo.

7) Studio della derivata seconda, ossia ricerca degli intervalli in cui la funzione ha concavità verso l'alto o verso il basso. I punti in cui la f cambia concavità si dicono punti di flesso.

Si pone la derivata seconda $f''(x) \geq 0$ e si risolve la disequazione. Negli intervalli in cui risulta $f''(x) > 0$ la funzione ha concavità verso l'alto, negli intervalli in cui $f''(x) < 0$ la funzione ha concavità verso il basso.