SUCCESSIONI-SERIE-FORMULE DI EULERO

Siano le seguenti definizioni:

Considero la successione

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{R}$$

di numeri reali.

Definizione 1

Si dice SERIE numerica la scrittura

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

(che ha un significato diverso dalla somma ordinaria).

Volendo dare un significato più preciso alla (1) procedo cosi:

indico con

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Ottenendosi, cosi, dei nuovi termini che vengono chiamati ***somme parziali***.

Considero la nuova successione delle somme parziali

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots \qquad (2)$$

Si hanno le ulteriori

Definizione 2

La serie (1) si dice CONVERGENTE se

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = s \text{, con } s \text{ finito}$$

s si dice valore o somma della serie e si scrive, convenzionalmente

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Definizione 3

La serie (1) si dice DIVERGENTE se

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \infty \begin{cases} +\infty & \text{(positivamente divergente)} \\ -\infty & \text{(negativamente divergente)} \end{cases}$$

Definizione 4

La serie (1) si dice INDETERMINATA (o anche oscillante) se lo è anche la successione (2), se cioè non esiste

Il limite della successione delle somme parziali.

SERIE DI POTENZE

Considero la successione di numeri reali

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{R}$$

Allora, per $x \in \mathbb{R}$, si abbia

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots = s$$

Tale scrittura si dice SERIE di POTENZE nella variabile x.

I numeri $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ si dicono coefficienti della s.

SERIE DI MAC-LAURIN

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di I del punto 0 (zero) e supponiamo che in I la $f(x)$ ammetta derivate di qualsiasi ordine. Costruisco i coefficienti numerici nel modo seguente:

$$a_0 = f(0), a_1 = f'(0), a_2 = \frac{f''(0)}{2!},\ a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \dots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \dots$$

Allora

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Si dice SERIE di POTENZE di MAC-LAURIN relativa alla funzione $f(x)$.

Se poi

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Allora si dice che la funzione $f(x)$ è sviluppabile in serie di Mac-Laurin.

Adesso siamo pronti per affermare che le seguenti funzioni

a) $y = e^x$
b) $y = \sin x$
c) $y = \cos x$

sono sviluppabili in serie di Mac-Laurin.

Infatti, per la a):

$$f(0) = e^0 = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1 \quad \text{e cosi via, per cui}$$

$$a_0 = 1, a_1 = f'(0)x = x, a_2 = \frac{f''(0)}{2!}x^2 = \frac{1}{2!}x^2 \quad \text{e cosi } a_3 = \frac{x^3}{3!}, \dots a_n = \frac{x^n}{n!}, \dots$$

Per cui, ancora

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \cdots}$$

In particolare, per $x = 1$ si ha

$$\boxed{e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \cdots}$$

Per la b) si ha

$$f'(senx) = cosx, f''(senx) = -senx, f'''(senx) = -cosx \quad \text{e cosi via}$$

$$a_0 = sen0 = 0, a_1 = cos0 \cdot x = x, a_2 = -\frac{sen0}{2!}x^2 = 0, a_3 = -\frac{cos0}{3!}x^3 = \frac{1}{3!}x^3, \dots, a_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n + \cdots$$

Quindi

$$\boxed{senx = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n + \cdots}$$

Mentre per la c)

$$\boxed{cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n + \cdots}$$

Osservo che lo sviluppo di $cosx$ si ottiene semplicemente derivando ambo i membri della $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$

<u>FUNZIONE ESPONENZIALE NEL CAMPO COMPLESSO</u>

Sia $z = x + iy$ e considero e^z che si sviluppa in serie di Mac-Laurin come e^x con x reale.

Ma $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. Svilupo in serie e^{iy}:

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots + \frac{(iy)^n}{n!} + \cdots$$

Tenendo conto che $i^2 = -1, i^3 = -i$, e cosi via, posso scrivere, dopo aver raccolto i,

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{(y)^2}{2!} + \frac{(y)^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(y - \frac{(y)^3}{3!} + \frac{(y)^5}{5!} - \cdots\right) = cosy + iseny$$

Cioè si ha

$$e^{iy} = cosy + iseny$$

Nella quale, sostituendo $y = \pi$, si ha

$$e^{i\pi} = cos\pi + isen\pi = -1 + 0$$

di qui

$$e^{i\pi} = -1$$

E quindi la notevole formula del grande Eulero

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

FORMULE DI EULERO

Abbiamo visto che, mettendo x al posto di y,

(1) $e^{ix} = cosx + isenx$

Ma anche, mettendo $-x$ al posto di x

(2) $e^{-ix} = \cos(-x) - isenx = cosx - isenx$

Addizionando e sottraendo le due precedenti formule si ottengono le seguenti altre

(3) $cosx = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

(4) $senx = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Le (1), (2), (3) e (4) si dicono formule di Eulero

Raccolgo

$$\boxed{\begin{gathered} e^{ix} = cosx + isenx \\ e^{-ix} = cosx - isenx \\ cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ senx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{gathered}}$$