Supremazia dei numeri primi

Quadrati magici di ordine un numero primo.

Voglio costruire un particolare quadrato magico di ordine n, in modo che compaiano numeri da 1 a n, una sola volta, in ogni riga, in ogni colonna e in ciascuna diagonale. Ebbene, ciò è possibile solo se n è un **numero primo**. Vediamo come. Riporto prima il quadrato magico 5x5, nel quale inserisco i numeri da 1 a 25 alla solita maniera riportata nei "Quadrati magici", sempre in questo sito alla voce Teoria dei numeri.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Fig.1

Come si vede nella figura 1, in ogni riga, in ogni colonna e in ciascuna diagonale compaiono i numeri da 1 a 25. Il numero di ogni cella maggiore di 5 si divide per 5 e al suo posto si scrive il resto della divisione. Per esempio, nella prima cella della prima riga c'è il numero 17: divido 17 per 5 e il resto 2 della divisione lo scrivo al suo posto (vedi fig.2). Se il resto è zero allora scrivo 5. Per esempio, nella terza cella della quinta riga c'è il numero 25 (multiplo di 5); al suo posto scrivo 5, cosi come al posto di 15, di 20, di 10.Il quadrato che si ottiene è a destra, nella figura 2.

2	4	1	3	5
3	5	2	4	1
4	1	3	5	2
5	2	4	1	3
1	3	5	2	4

Fig.2

Se l'ordine n non è un numero primo, allora si possono avere ripetizioni di uno stesso numero.

L’aritmetica modulare di modulo un numero primo

Ora propongo un’altra riflessione sui numeri primi. Penso all’aritmetica modulare di modulo un numero primo (del resto, ho già fatto ricorso ad essa più sopra, quando ho parlato dei quadrati magici di ordine un numero primo).

Ebbene, le quattro operazioni all’interno del modulo restituiscono un numero interno (cioè minore del modulo). Cosi come ho fatto sopra. Se il modulo è per esempio, 5 allora 7+5=12, e 12 modulo 5 restituisce 2 (resto della divisione di 12 per 5). In questa trattazione se il resto della divisione è zero, si scrive zero.

Faccio un esempio per chiarire. Costruisco l’orologio di modulo 7 utilizzando i sette numeri 0,1,2,3,4,5,6.

Le quattro operazioni:

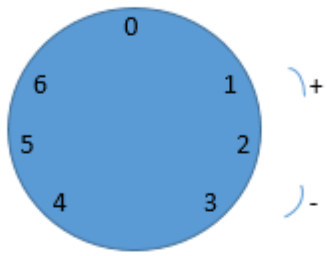
2+5=0 (7 equivale a 0)

4-6=5 (in senso antioraro)

3x4=5 (12 equivale a 5)

6:2=3

5:4=3 (perché 3x4=5)



Dunque, quando il modulo p è primo, è sempre possibile effettuare le quattro operazioni all’interno del modulo (i risultati sono numeri minori del modulo), ed in particolare la divisione.

Se il modulo non è un numero primo, allora la divisione non sempre è possibile. Infatti nell’orologio di modulo 12 l’addizione (in senso orario) la sottrazione (in senso antiorario) e la moltiplicazione sono operazioni sempre possibili, cioè restituiscono risultati all’interno di 12. Per la divisione non la si può effettuare. Vediamo meglio: la divisione fra due numeri interi a e b è quel numero c che, moltiplicato per b, restituisce a.

$$a : b = c \ tale \ che \ cxb = a$$

Ora, nel caso di p=12 (che corrisponde a 0, punto di partenza dell’orologio, seguito da 1 in senso orario) per cui 3x4=0 si avrebbe 0:4=3 oppure 0:3=4 e ciò appare alquanto strano e privo di significato, come pure il prodotto di due numeri 3 e 4 è zero. Di qui, il modulo deve essere necessariamente un numero primo che, cosi, non è prodotto di alcuna coppia di numeri. Queste considerazioni sono state suggerite da “**Il mostro e la simmetria” di Mark Ronan**.

Cosi, l’aritmetica modulare di modulo p numero primo, ci dice perché si possono costruire quadrati magici di ordine p, di cui nella prima parte, più sopra.

Voglio chiudere questa pagina riportando la famosa congettura di

CONGETTURA DI GOLDBACH (Christian Goldbach, 18-03-1690, 20-11-1764)

“ogni numero pari è somma di due numeri primi ”