Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Tesi

Teoremi di punto fisso per somme di operatori

Candidata:
Liliana Filipponio

Relatore:
Prof. Paolo Acquistapace

Controrelatore:
Prof. Carlo Carminati

Anno Accademico 2007/2008

Indice

Introduzione

I teoremi di punto fisso sono uno degli strumenti fondamentali dell'analisi non lineare e hanno una moltitudine di applicazioni. I risultati classici riguardano il caso di un singolo operatore; le scienze applicate, però, hanno generato molti problemi traducibili in equazioni in cui compare in modo naturale la somma di due operatori A, B con proprietà assai differenti l'uno dall'altro, e ciò rende impossibile applicare ad $A + B$ i risultati classici. Di qui l'importanza di avere a disposizione teoremi di punto fisso per somme di operatori, tema che costituisce l'oggetto di questa tesi. Ci occuperemo in particolare del teorema di punto fisso di Krasnoselskii il cui enunciato è riportato qui di seguito:

Teorema 1 *Sia X uno spazio di Banach ed M un sottoinsieme non vuoto chiuso e convesso di X. Si considerino due funzioni $A, B : M \to X$ tali che:*

i) A è continua e $A(M)$ è contenuto in un insieme compatto

ii) B è una contrazione di costante $\lambda < 1$.

iii) $Ax + By \in M$, $\forall\, x, y \in M$

Allora esiste $y \in M$ punto fisso per $A + B$.

Le generalizzazioni del teorema 1 sono numerose e sono opera di diversi autori; la varietà di questi risultati sarà illustrata da vari esempi in cui essi trovano applicazione: dalle equazioni integrali alle equazioni differenziali ordinarie per finire con le equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.
Veniamo alla descrizione dei capitoli della tesi.
Nel primo capitolo, dopo aver richiamato i principali teoremi classici di punto fisso, si riportano alcuni ben noti risultati relativi alle topologie deboli in spazi di Banach, ed in particolare teoremi di compattezza , di metrizzabilità e di sequenziale continuità, ingredienti fondamentali per lo studio del teorema di Krasnoselskii e di una sua variante dovuta a Burton [B]. Tale variante è scaturita dall'esigenza di modificare l'ipotesi iii) del teorema 1 perché particolarmente difficile da verificare in molte applicazioni. Nel suo lavoro, infatti,

Burton mostra che è sufficiente provare una condizione meno restrittiva della iii), cioè

$$\text{se } u = B(u) + A(v) \text{ con } v \in M, \text{ allora } u \in M. \qquad (iii')$$

Anzi, nel caso in cui M sia una palla chiusa, la condizione (iii') è assicurata dalla seguente:

Proposizione 2 *Si supponga che valgano le ipotesi i) e ii) del teorema 1. Sia $r > 0$ tale che $M = \{y \in X \mid \|y\| \leq r\}$. Sia inoltre $A(M) \subset M$. Se vale la condizione*

$$\|(I - B)x\| \geq \|x\|,$$

allora la condizione iii') è verificata.

L'efficacia della proposizione 2 e della variante iii') viene, poi, illustrata da Burton con un esempio in cui si cerca una soluzione per una data equazione integrale.
Nel secondo capitolo si descrivono invece le differenti versioni del teorema 1 introdotte in un lavoro di Barroso e Teixeira [BT]. I due autori pervengono a tali risultati sulla base di modifiche alle ipotesi i) ed ii). L'ipotesi *i*), infatti, richiede la continuità dell'operatore A e la compattezza della sua immagine, ma per esempio in spazi di Banach di dimensione infinita la compattezza è un'ipotesi troppo forte. Ciò spiega l'esigenza di considerare spazi di Banach con topologie deboli e quindi ambientarci in spazi vettoriali topologici localmente convessi.
Anche l'ipotesi *ii*), che richiede che l'operatore B sia una contrazione, è una condizione piuttosto restrittiva.
I capitoli terzo e quarto sono dedicati alle applicazioni. Nel terzo capitolo si studia una equazione non lineare del tipo:

$$A(u) + \lambda B(u) = u \qquad (1)$$

dove $A, B : X \to X$, con X spazio di Banach riflessivo dotato della topologia debole, e $\lambda \geq 0$.
Nel quarto capitolo si affronta invece un'equazione ellittica non lineare del tipo:

$$-\Delta u + \lambda u = f(x, u, \mu) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \qquad (2)$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato con bordo di classe $C^{1,1}$, λ è un numero reale ed $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Dopo aver ricondotto l'equazione (2) ad un problema di punto fisso, si dimostra sotto certe ipotesi che essa ammette soluzione in opportuni spazi di Sobolev.

Capitolo 1

Risultati preliminari

1.1 Teoremi di punto fisso

In questo capitolo si riporteranno i principali risultati classici che fanno da supporto agli argomenti affrontati nel seguito. Per la loro dimostrazione rimandiamo a [DS].

Teorema 1.1 (Teorema del punto fisso di Schauder) *Sia X uno spazio normato e sia M un sottoinsieme non vuoto convesso e compatto di X. Allora ogni operatore continuo che manda M in sé, ha un punto fisso.*

Teorema 1.2 (Secondo teorema di Schauder) *Sia X uno spazio di Banach e sia M un sottoinsieme non vuoto, chiuso e convesso di X. Se T è un operatore continuo da M in un insieme compatto $K \subset M$, allora T ha un punto fisso.*

Teorema 1.3 (Teorema del punto fisso di Schauder-Tychonoff) *Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e di Hausdorff e sia M un sottoinsieme chiuso e convesso di X. Sia $T : M \to M$ una funzione continua tale che $T(M)$ è relativamente compatto. Allora T ha un punto fisso in M.*

1.2 Teoremi di metrizzabilità

È utile richiamare anche alcuni teoremi di metrizzabilità.

Teorema 1.4 *Sia X uno spazio di Banach. X è separabile se e solo se la palla unitaria B^* di X^*, munita della topologia debole*, è metrizzabile.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Sia $X = \overline{\{x_n\}}$. Si definisca la seguente distanza su B^*:

$$d(\phi, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|\psi(x_n) - \phi(x_n)|}{1 + |\psi(x_n) - \phi(x_n)|}.$$

Verifichiamo che la topologia su B^* associata alla distanza d, coincide con la topologia debole* su B^*.
Sia i l'identità. L'applicazione

$$i : (B^*, w^*) \to (B^*, d)$$

è continua, infatti: dato $\phi_0 \in B^*$ e scelto un intorno

$$U = \{\psi \in B^* \ : \ d(\psi, \phi_0) < \delta\},$$

il w^*-intorno

$$V = \left\{\psi \in B^* \ : \ |\psi(x_n) - \phi_0(x_n)| < \frac{\delta}{2} \quad \text{per ogni } n = 1, \dots, N_\delta\right\}$$

è tale che

$$\begin{aligned}
\psi \in V \quad \Rightarrow \quad d(\psi, \phi_0) \ &< \ \sum_{n=0}^{N_\delta} 2^{-n} \frac{|\psi(x_n) - \phi_0(x_n)|}{1 + |\psi(x_n) - \phi_0(x_n)|} + \sum_{n > N_\delta} 2^{-n} \leq \\
&\leq \ \sum_{n=0}^{N_\delta} 2^{-n} \frac{\delta/2}{1 + \delta/2} + \frac{\delta}{2} < \\
&< \ \delta,
\end{aligned}$$

dunque $\psi \in U$. A questo punto, si osservi che (B^*, w^*) è compatto, (B^*, d) è uno spazio di Hausdorff, l'identità i è continua, per quanto appena dimostrato, ed è chiaramente biunivoca. Allora i è un omeomorfismo.

($\Leftarrow$) Sia (B^*, w^*) metrizzabile; allora $0 \in B^*$ ha un sistema fondamentale di intorni $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Si può supporre che tali U_n siano della forma:

$$U_n = \{\phi \in B^* \ : \ |\phi(x)| < \varepsilon_n, \ x \in A_n\}$$

dove A_n è un sottoinsieme finito di X ed $\varepsilon_n > 0$. Sia $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; se $\phi(x) = 0 \, \forall \, x \in A$, allora $\phi \in U_n \, \forall \, n$ cioè $\phi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = 0$.
Ora, posto $X_1 = \overline{span(A)}$, si ha che X_1 è separabile ed $X_1 = X$ per il teorema di Hahn-Banach; infatti se fosse $x \in X \setminus X_1$, esisterebbe $\phi \in X^*$ tale che $\|\phi\|_{X^*} = 1$ e $\phi(y) = 0$ con $y \in X_1$. Allora $\phi(x) = 0$ su A cioè $\phi = 0$, che è assurdo.

Teorema 1.5 *Sia X uno spazio di Banach separabile. Sia $K \subseteq X$ e debolmente compatto. Allora (K, w) è metrizzabile.*

Dimostrazione. Sia S una palla chiusa contenente K. Poiché X è separabile, la palla unitaria B^* di X^*, munita della topologia w^*, è metrizzabile per il teorema 1.4. Inoltre B^* è anche w^*-compatta per il teorema di Banach-Alaoglu, dunque, poiché gli spazi metrici compatti sono separabili, B^* è separabile. Dato che $X^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(nB^*)$, anche (X^*, w^*) è separabile. Sia H un denso numerabile in X^*: sarà $H = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si definisca su S la distanza

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|\phi_n(x-y)|}{1 + |\phi_n(x-y)|};$$

allora (S, d) è uno spazio metrico. Proviamo che $(S, d) = (S, w)$.
Sia i l'identità, l'applicazione $i : (S, w) \to (S, d)$ è continua, infatti: dato $x_0 \in S$, sia $U = \{x \in S \,:\, d(x, x_0) < \delta\}$; allora il w-intorno

$$V = \left\{ x \in S \,:\, |\phi_n(x - x_0)| < \frac{\delta}{2}, \quad \text{per ogni } n = 1, \dots, N_\delta \right\}$$

è tale che

$$\begin{aligned} x \in V \quad \Rightarrow \quad d(x - x_0) &\le \sum_{k=1}^{N_\delta} 2^{-n} \frac{|\phi_n(x-y)|}{1 + |\phi_n(x-y)|} + \sum_{k>N_\delta} 2^{-n} < \\ &< \sum_{n=1}^{N_\delta} 2^{-n} \frac{\delta/2}{1+\delta/2} + \frac{\delta}{2} < \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Poiché (S, w) è compatto, (S, d) è di Hausdorff, i è biunivoca ed anche continua, allora è un omeomorfismo. In particolare $(K, w) = (K, d)$.

1.3 Teoremi di compattezza

Definizione 1.6 *Sia X uno spazio normato e sia $A \subset X$ un insieme. Si definisce chiusura debole sequenziale di A l'insieme:*

$$\overline{A}^{w,seq.} = \{x \in X \,:\, \exists\, \{x_n\} \subseteq X \textit{ tale che } x_n \rightharpoonup x\}.$$

È possibile confrontare la chiusura debole sequenziale con la chiusura debole; vale, infatti, il seguente teorema:

Teorema 1.7 *Sia X uno spazio normato e sia $A \subset X$ un insieme. Allora la chiusura debole sequenziale di A è contenuta nella chiusura debole di A.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \overline{A}^{w,seq.}$, allora esiste $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tale che $x_n \rightharpoonup x_0$. Per definizione di topologia debole, si sa che $f(x_n) \to f(x_0)$ per ogni $f \in X^*$.
Si deve provare che $x_0 \in \overline{A}^{w}$, cioè che ogni intorno di x_0 nella topologia debole interseca A. Per definizione, un intorno debole U di x_0 è un insieme del tipo:

$$U = \{x \in x : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon \qquad \forall\, i \in I\}$$

ove I è un insieme finito, $\varepsilon > 0$, $f_i \in X^*$.
Ora, poiché $f_i(x_n) \to f_i(x_0)$, per ogni $i \in I$, si ha che $x_n \in U$ per ogni n grande. Allora $x_n \in U \cap A$ cioè $U \cap A \neq \emptyset$.

Si noti che l'inclusione inversa a quella mostrata nel teorema non è vera, come si vede nel seguente:

Controesempio 1.8 *Sia $X = l^2$ ed $A \subset X$ l'insieme:*

$$A = \{e^{(m)} + me^{(n)} \,:\, 1 \leq m < n < \infty\}.$$

Si dimostra che 0 è nella chiusura debole di A, ma non nella chiusura debole sequenziale, cioè non vi è alcuna successione di elementi di A che converge debolmente a 0.

Per verificare che 0 è nella chiusura debole, bisogna mostrare che ogni intorno dell'origine, nella topologia debole, interseca A. Un intorno dell'origine nello spazio l^2 munito della topologia debole è un insieme del tipo:

$$U = \{x \in l^2 \,:\, |x_i| < \varepsilon \quad \text{per ogni } i = k_1, \ldots, k_h\}.$$

Pertanto se si scelgono m ed n come segue:

$$m > \max\{k_1, \ldots, k_h\} \qquad \text{ed} \qquad n > m$$

si ottiene un elemento di A che sta anche in U, così $U \cap A \neq \emptyset$.

Per mostrare, invece, che 0 non appartiene alla chiusura debole sequenziale si procederà per assurdo.
Sia $\{x_{m_jn_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset A$ una successione tale che $x_{m_jn_j} \overset{j\to\infty}{\rightharpoonup} 0$. Allora $\{x_{m_jn_j}\}$ è limitata:
esiste una costante $K > 0$ tale che

$$\|x_{m_jn_j}\|_{l^2} = \sqrt{1 + {n_j}^2} \leq K$$

da cui

$$n_j \leq K.$$

Questo comporta che esiste $i \in \{1, \ldots, K\}$ tale che

$$m_j = i \quad \text{infinite volte} \qquad \text{e} \qquad (x_{m_j n_j})_i = 1 \quad \text{infinite volte}$$

cioè la successione $\{x_{m_j n_j}\}$ non può convergere a 0, e questo è assurdo.

Lemma 1.9 *Sia X uno spazio di Banach e sia $H \subseteq X$ un insieme debolmente relativamente compatto. Se $x_0 \in (\overline{H})^w$, allora $x_0 \in (\overline{H})^{w,seq}$, cioè esiste $\{x_n\} \subseteq H$ tale che $x_n \rightharpoonup x_0$, cioè: $(\overline{H})^w = (\overline{H})^{w,seq}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione sarà divisa in più passaggi.

1° **passo** Esiste H_0 numerabile, tale che $(\overline{H})^w = (\overline{H}_0)^w$.

Sia B^* la palla unitaria chiusa di X^* e sia

$$B_n^* = B^* \times B^* \times \ldots \times B^* \quad \text{n volte.}$$

Per $m, n \in \mathbb{N}^+$ e $f = (f_1, \ldots, f_n) \in B_n^*$ si consideri il w-intorno di $u \in \overline{H}^w$

$$U_{m,n,f}(u) = \left\{ v \in X : |f_j(v-u)| < \frac{1}{m},\, j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Per ipotesi, per ogni $m, n \in \mathbb{N}^+$ e $f \in B_n^*$, esiste $v \in H$ tale che $v \in U_{m,n,f}(u)$. Si può riscrivere questa affermazione in modo diverso: per ogni $m, n \in \mathbb{N}^+$ e $v \in H$ sia

$$W_{m,n,v} = \{ f \in B_n^* \,|\, v \in U_{m,n,f}(u) \};$$

allora si può affermare che per ogni $m, n \in \mathbb{N}^+$ l'insieme B_n^* è ricoperto dalla famiglia $\{W_{m,n,v}\}_{v \in M}$. Si osservi che i $W_{m,n,v}$ sono aperti in B_n^* per la topologia indotta dalla topologia debole* di $(X^*)^n$; infatti se $f \in W_{m,n,v}$ l'insieme

$$\left\{ g \in B_n^* : |f_i(u-v) - g_i(u-v)| < \frac{1}{m} - \max_{1 \leq j \leq n} |f_j(u-v)|, \right.$$
$$\left. i = 1, \ldots, n \right\}$$

è un intorno di f in tale topologia che è contenuto in $W_{m,n,v}$. Poiché, per il teorema di Banach-Alaoglu B^* è debolmente* compatto in X^*, anche B_n^* è debolmente* compatto in $(X^*)^n$. Esiste, quindi, una sottofamiglia finita di $\{W_{m,n,v}\}_{v\in H}$ che è ancora un ricoprimento di B_n^*: in altre parole, esiste un sottoinsieme finito $S_{m,n} \subseteq H$ per il quale per ogni $f = (f_1, \ldots, f_n) \in B_n^*$ esiste $v \in S_{m,n}$ tale che:

$$|f_j(v-u)| < \frac{1}{m} \quad \text{per } j = 1, \ldots, n.$$

Posto $H_0 = \cup_{m,n\in\mathbb{N}^+} S_{m,n}$, H_0 è numerabile; essendo contenuto in H è anche limitato in X. Per definizione di H_0, per ogni $f \in B_n^*$ esiste $v \in H_0$ tale che $v \in U_{m,n,f}(u)$: dunque u appartiene alla chiusura debole di H_0.
Sia, ora, $X_0 = \overline{span\{H_0\}}$.

2° **passo** X_0^* è separabile in X^*.

Poiché X_0 è separabile, la palla unitaria B_0^* di X_0^* è w^*-metrizzabile. Inoltre X_0^* è uno spazio di Banach perché è un chiuso contenuto nello spazio di Banach X, quindi B_0^* è w^*-compatta in X_0^* per il teorema di Banach-Alaoglu. Per un noto teorema di topologia, gli spazi metrici compatti sono separabili, dunque B_0^* è separabile. Allora $X_0^* = \cup_{k\in\mathbb{N}} kB_0^*$ è separabile.

Sia $\{\phi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ densa in X_0^* per la topologia w^*. Si può affermare che per ogni $i \in \mathbb{N}$ esiste $\{a_{n_m}^{(i)}\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq H_0$ tale che $\phi_i(a_{n_m}) \to \phi_i(x_0)$ per $m \to \infty$.
Infatti per il 1° passo si può scrivere $H_0 = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e si ha $x_0 \in \overline{H}^w = \overline{H_0}^w$.
Allora per ogni i, k si consideri il w-intorno U di x_0:

$$U_{i,k}(x_0) = \left\{ x \in E : |\phi(x - x_0)| < \frac{1}{k} \right\}$$

; poiché $U_{i,k} \cap H_0 \neq \emptyset$, esiste $a_{n_k}^{(i)}$ in H_0 tale che $a_{n_k}^{(i)}$ appartiene ad $U_{i,k}$. Scegliendo k in $\{k_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ con $k_m \to \infty$ per $m \to \infty$ si trova $\{a_{n_{k_m}}^{(i)}\} \subseteq \{a_n\}$ tale che $|\phi_i(a_{n_{k_m}}^{(i)}) - \phi_i(x_0)| < \frac{1}{k_m}$ cioè $\phi_i(a_{n_{k_m}}^{(i)}) \to \phi_i(x_0)$. Allora,

$$\forall\, i\ \exists\, \{a_{n_m}^{(i)}\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq H_0 \quad \text{tale che} \quad \phi_i(a_{n_m}^{(i)}) \to_{m\to\infty} \phi_i(x_0).$$

A questo punto, attraverso un processo di diagonalizzazione, si trova una successione $\{b_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \{a_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ tale che $\phi_i(b_{n_m}) \to \phi_i(x_0)$ per $m \to \infty$ e per ogni i.
Il processo di diagonalizzazione consiste nell'estrarre la successione $\{a_{n_m}^{(i)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ da $\{a_{n_m}^{(i-1)}\}_{m\in\mathbb{N}}$:

Per $i = 1$

$$\text{esiste} \quad \{a_{n_m}^{(1)}\}_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{tale che} \quad \phi_1(a_{n_m}^{(1)}) \to_{m\to\infty} \phi_1(x_0).$$

Per $i = 2$

$$\text{esiste} \quad \{a_{n_m}^{(2)}\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \{a_{n_m}^{(1)}\} \quad \text{tale che} \quad \phi_2(a_{n_m}^{(2)}) \to_{m\to\infty} \phi_2(x_0),$$

ma è anche vero che $\phi_1(a_{n_m}^{(2)}) \to_{m\to\infty} \phi_1(x_0)$ essendo $\{a_{n_m}^{(2)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ una successione estratta.

$\vdots$

Per $i = p$

$$\text{esiste} \quad \{a_{n_m}^{(p)}\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \{a_{n_m}^{(p-1)}\} \quad \text{tale che} \quad \phi_j(a_{n_m})^{(p)} \to_{m\to\infty} \phi_j(x_0)$$

per ogni $j = 1, \ldots, p$. Scrivendo tutte queste successioni sotto forma di matrice:

$$\begin{matrix} a_{n_1}^{(1)} & a_{n_2}^{(1)} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n_m}^{(1)} \\ a_{n_1}^{(2)} & a_{n_2}^{(2)} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{n_m}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n_1}^{(p)} & a_{n_2}^{(p)} & \ldots & a_{n_p}^{(p)} & \ldots & a_{n_m}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{matrix}$$

e prendendo gli elementi sulla diagonale si ottiene proprio la successione indicata, appunto, con $\{b_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$.

Ora, poiché H è debolmente relativamente compatto, per il lemma 1.12, estraggo da $\{b_{n_m}\}$ una successione $\{x_n\}$ tale che $x_n \rightharpoonup x \in \overline{H}^{w,seq} \subseteq \overline{H}_0^{\,w} \subseteq \overline{X}_0^{\,w} = X_0$. Allora $\phi_i(x_n) \to \phi_i(x)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, da cui $\phi_i(x) = \phi_i(x_0)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Per la w^*-densità di $\{\phi_i\}$, si ha

$$\phi(x) = \phi(x_0) \quad \text{per ogni } \phi \in X_0^*.$$

Per il teorema di Hahn-Banach applicato ad X_0, si ricava

$$x = x_0 \in \overline{H}_0^{\,w,seq}.$$

Prima di dimostrare il teorema che segue, verifichiamo il seguente lemma:

Lemma 1.10 *Sia X uno spazio di Banach. Se $F \subseteq X^{**}$ è un sottospazio finito-dimensionale, esistono $\phi_1, \ldots, \phi_p \in X^*$ con $\|\phi_i\|_{X^*} = 1$, $i = 1, \ldots, p$, tali che*

$$max\{|\beta(\phi_i)| \,:\, 1 \le i \le p\} \ge \frac{1}{2}\|\beta\|_{X^{**}} \quad \textit{per ogni } \beta \in F.$$

Dimostrazione. Se B è la palla unitaria di F, si sceglie una $\frac{1}{4}$-rete finita $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ di ∂B (che è compatto). È possibile scegliere $\phi_1, \ldots, \phi_p \in X^*$, con $\|\phi_i\|_{X^*} = 1$, tali che $\alpha_i(\phi_i) > \frac{3}{4}$.
Allora per ogni $\beta \in F \setminus \{0\}$ si ha, posto $\gamma = \frac{\beta}{\|\beta\|_{X^{**}}}$ e scelto j tale che $\|\gamma - \alpha_j\|_{X^{**}} < \frac{1}{4}$,

$$|\gamma(\phi_j)| \geq \alpha_j(\phi_j) - |(\gamma - \alpha_j)(\phi_j)| > \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

da cui la tesi.

Teorema 1.11 (Teorema di Eberlein-Smulyan) *Sia X uno spazio di Banach. Sia $A \subseteq X$ non vuoto. Sono fatti equivalenti:*

i) A è debolmente relativamente compatto,

ii) A è debolmente sequenzialmente relativamente compatto, ossia ogni successione contenuta in A ha una sottosuccessione debolmente convergente in X,

iii) ogni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ ha un punto limite per la topologia debole.

Dimostrazione. (ii) $\Rightarrow$ (iii)
Se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, per ipotesi $\exists \{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $a_{n_k} \rightharpoonup x \in X$. Se allora U è un w-intorno di x,

$$U = \{y \in X \,:\, |\phi_i(x - y)| < \varepsilon \quad i = 1, \ldots, q\},$$

allora definitivamente $a_{n_k} \in U$, quindi $U \cap \{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \neq \emptyset$. Concludendo, x è un punto limite per $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rispetto alla topologia debole.

(iii) $\Rightarrow$ (i)
Sia A verificante (iii); allora, per ogni $\phi \in X^*$, l'insieme $\phi(A) \subseteq \mathbb{R}$ verifica (iii). Ne segue facilmente, ragionando per assurdo, che $\phi(A)$ è limitato per ogni $\phi \in X^*$. Allora dal teorema di Banach-Steinhaus si ricava che A è limitato in X.
Detta $J : X \to X^{**}$ l'immersione canonica, l'insieme $J(A)$ è limitato in X^{**}, dunque per il teorema di Banach-Alaoglu $\overline{J(A)}^{w^*}$ è w^*-compatto. A questo punto è sufficiente dimostrare che $\overline{J(A)}^{w^*} \subseteq J(X)$, infatti $J : (X, w) \to (J(X), w^*)$ è un omeomorfismo, dunque da $A \subseteq J^{-1}(\overline{J(A)}^{w^*})$ si ricava che $\overline{A}^{w}$ è w-compatto.
Allora, posto $\overline{J(A)}^{w^*} = H$, proviamo che

$$H \subseteq J(X).$$

Sia $\alpha \in H$. Si scelga $\phi_1 \in X^*$, con $\|\phi_1\| = 1$. Esiste $a_1 \in A$ tale che $|(\alpha - Ja_1)(\phi_1)| < 1$.
Si definisca $F_1 = span\{\alpha, \alpha - Ja_1\}$; applicando il lemma 1.10 si trovano $\phi_2, \ldots, \phi_{n_2} \in X^*$ con $\|\phi_i\|_{X^*} = 1$ per $i = 2, \ldots, n_2$, tali che

$$\max\{|\beta(\phi_i)| \,:\, 2 \leq i \leq n_2\} \geq \frac{1}{2}\|\beta\|_{X^{**}} \quad \text{per ogni } \beta \in F.$$

Esiste $a_2 \in A$ tale che $\max\{|(\alpha - Ja_2)(\phi_i)|,\ 1 \leq i \leq n_2\} \leq \frac{1}{2}$.
Si definisca $F_2 = span\{\alpha, \alpha - Ja_1, \alpha - Ja_2\}$ e applicando ancora una volta il lemma si trovano $\phi_{n_2+1}, \ldots, \phi_{n_3} \in X^*$, con $\|\phi_i\|_{X^*} = 1$ per $i = n_2 + 1, \ldots, n_3$, tali che

$$\max\{|\beta(\phi_i)| \,:\, n_2 + 1 \leq i \leq n_3\} \geq \frac{1}{2}\|\beta\|_{X^{**}} \quad \text{per ogni } \beta \in F_2.$$

Continuando, allo stesso modo esiste $a_3 \in A$ tale che $\max\{|\alpha - Ja_3(\phi_i)|,\ 1 \leq i \leq n_3\} \leq \frac{1}{3}$ e si itera.

Si consideri, allora, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. Per ipotesi, tale successione ha un punto limite $x \in X$ per la topologia debole. Poiché $M = \overline{span\{a_n\}}$ è un chiuso, $x \in M$. Posto $F = \bigcup_{h=1}^{\infty} F_h = span\{\alpha, \alpha - Ja_1, \ldots\}$, da $X \in M$ segue $\alpha - J_x \in \overline{F}^{w^*}$. Infatti, fissato un w^*-intorno

$$V = \{\beta \in X^{**} \,:\, |\beta(\phi_j) - (\alpha - J_x)(\phi_j)| < \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, q\},$$

esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$a_n \in \{y \in X \,:\, |\phi_j(y) - \phi_j(x)| < \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, q\} \cap A,$$

da cui $\alpha - J_{a_n} \in V \cap F$. Dato che, per costruzione,

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |\beta(\phi_i)| \geq \frac{1}{2}\|\beta\|_{X^{**}} \quad \text{per ogni } \beta \in F,$$

si ha

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |(\alpha - J_x)(\phi_i)| \geq \frac{1}{2}\|\alpha - J_x\|_{X^{**}}. \tag{1.1}$$

Inoltre, essendo

$$|(\alpha - J_{a_n})(\phi_i)| < \frac{1}{p}\ \forall\, n \geq n_p \quad \text{per ogni } i = 1, \ldots, n_p,$$

si ricava

$$|(\alpha - J_x)(\phi_i)| \leq |(\alpha - J_{a_n})(\phi_i)| + |\phi_i(a_n) - \phi_i(x)| \leq \frac{1}{p} + |\phi_i(a_n - x)|$$

per ogni $n \geq n_p$, per ogni $i = 1, \ldots, n_p$. D'altronde, per ogni $i \in \mathbb{N}$ e per ogni p esiste $n \geq n_p$ tale che

$$|\phi_i(x - a_n)| < \frac{1}{p} \quad \text{per ogni } i = 1, \ldots, p;$$

quindi

$$|(\alpha - J_x)(\phi_i)| \leq |(\alpha - J_{a_n})(\phi_i)| + |\phi_i(a_n - x)| < \frac{1}{p} + \frac{1}{p}$$

per ogni $i = 1, \ldots, p$. Pertanto, fissato i e per $p \to \infty$,

$$|(\alpha - J_x)(\phi_i)| = 0 \quad \text{per ogni } i \in \mathbb{N}.$$

La condizione 1.1 implica, dunque,

$$\alpha = J_x,$$

cioè $H \subseteq J(X)$.

(i)$\Rightarrow$ (ii)
Sia A debolmente relativamente compatto. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. Posto $M = \overline{span\{a_n\}}$, M è un sottospazio chiuso e quindi è w-chiuso. Ne segue che $A \cap M$ è relativamente compatto perché $\overline{A \cap M}^w \subseteq \overline{A}^w \cap \overline{M}^w = \overline{A}^w \cap M \subseteq \overline{A}^w$.
Si noti, poi, che M è uno spazio di Banach separabile e si consideri (M, w). Poiché $M \cap \overline{A}^w$ è compatto in (M, w), per il teorema 1.5 $M \cap \overline{A}^w$ è metrizzabile. Ora, in uno spazio metrico (i) e (ii) sono equivalenti, per cui $M \cap \overline{A}^w$ è w-sequenzialmente compatto. In particolare $M \cap A$ è w-sequenzialmente relativamente compatto, dato che

$$\overline{M \cap A}^{w,seq.} \subseteq \overline{M \cap A}^w = M \cap \overline{A}^w = \overline{M \cap \overline{A}^w} w, seq..$$

Allora, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente a un $x \in M$ in (M, w), quindi in (X, w) dato che $X^* \subseteq M^*$. Pertanto A è w-sequenzialmente relativamente compatto.

Corollario 1.12 (Lemma di Smulyan) *Sia X uno spazio di Banach e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una successione debolmente relativamente compatta. Allora esiste $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ tale che $x_{n_k} \rightharpoonup x \in X$.*

Dimostrazione. La tesi segue subito dal teorema 1.11 di Eberlein-Smulyan. Infatti l'insieme costituito dai punti della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è debolmente relativamente compatto per ipotesi, dunque per il teorema 1.11 è debolmente sequenzialmente relativamente compatto.

Teorema 1.13 (Teorema di Krein-Smulyan) *Sia X uno spazio di Banach e sia $K \subset X$ un insieme debolmente compatto. Allora $\overline{co(K)}$ è debolmente compatto.*

Dimostrazione. È sufficiente provare che $co(K)$ è sequenzialmente relativamente debolmente compatto: la tesi seguirà dal teorema di Eberlein-Smulyan.
Sia $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq co(K)$; allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un sottoinsieme finito $A_n \subseteq K$, tale che p_n è combinazione convessa di elementi di A_n. Si ponga

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \qquad X_0 = \overline{span\{A\}};$$

X_0 è uno spazio di Banach perché è un chiuso contenuto nello spazio di Banach X ed è separabile perché la chiusura di combinazioni lineari di un insieme numerabile, in uno spazio topologico, è separabile.
Sia $K_0 = K \cap X_0$, esso è debolmente compatto in X_0, con $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K_0$. Allora, per il teorema 1.5, (K_0, w) è metrizzabile con distanza δ data da

$$\delta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|\phi_n(x-y)|}{1+|\phi_n(x-y)|},$$

dove $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un opportuno denso di (X_0^*, w^*). Si osservi che X_0^* è w^*-separabile: infatti la palla unitaria B^* di X_0^* è w^*-metrizzabile, essendo X_0 separabile; inoltre è w^*-compatta per il teorema di Banach-Alaoglu. Ricordando che ogni spazio metrico compatto è separabile, si può affermare che B^* è anche w^*-separabile. Allora $X_0^* = \bigcup_{n=1}^{\infty}(nB^*)$ è w^* separabile.
Per quanto detto, fissato $\theta > 0$, esistono $z_1, \dots, z_n \in K_0$ tali che

$$K_0 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\delta(z_i, \theta).$$

Posto, ora, $H = co\{z_1, \dots, z_n\}$, l'insieme H è w-compatto. Per provare ciò, si noti che

$$H = \phi(M),$$

dove $M = \{a \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^n a_i = 1\}$, $\phi : M \to X_0$, $\phi(a) = \sum_{i=1}^n a_i z_i$ e ϕ è continua rispetto a δ. Infatti, posto $R = max\{\|z_1\|_X, \dots, \|z_n\|_X\}$ e $\rho_\nu = max\{\|\phi_j\|_{X_0^*} \mid 1 \le j \le \nu\}$, si ha per ogni $\eta > 0$, scelto ν_η in modo che

$\sum_{n=\nu_\eta+1}^{\infty} 2^{-n} < \eta/2$, se $|a-b|_n < \dfrac{\eta}{2R\rho_{\nu_\eta}}$ allora:

$$\begin{aligned}
\delta(\phi(a),\phi(b)) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|\phi_n(\phi(a)-\phi(b))|}{1+|\phi_n(\phi(a)-\phi(b))|} \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\eta_\nu} 2^{-n} \frac{\rho_{\nu_\eta} R|a-b|_n}{1+\rho_{\nu_\eta} R|a-b|_n} + \sum_{n=\nu_\eta+1}^{\infty} 2^{-n} \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\eta/2 + \eta/2 = \eta.
\end{aligned}$$

Ne segue che H, immagine continua di un compatto, è compatto rispetto a δ, quindi è debolmente compatto. In particolare H è totalmente limitato in (K_0,δ): fissato $\varepsilon > 0$, esistono $v_1,\ldots,v_m \in H$ tali che

$$H \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_\delta(v_j,\varepsilon/2).$$

A questo punto, si consideri $y \in co(K_0)$, quindi

$$y = \sum_{r=1}^{p} \lambda_r y_r,$$

con $y_r \in K_0$, $\lambda_r \in [0,1]$, $\sum_{r=1}^{p} \lambda_r = 1$. Per ciascun $r \in \{1,\ldots,p\}$ esiste $i_r \in \{1,\ldots,n\}$ tale che $y_r \in B_\delta(z_{i_r},\theta)$. Allora il vettore

$$u = \sum_{r=1}^{p} \lambda_r z_{i_r}$$

appartiene ad H e verifica, in corrispondenza dell'ε precedentemente fissato,

$$\begin{aligned}
\delta(y,u) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|\phi_n(\sum_{r=1}^{p} \lambda_r(y_i - z_{i_r}))|}{1+|\phi_n(\sum_{r=1}^{p} \lambda_r(y_r - z_{i_r}))|} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\nu_\eta} 2^{-n} \frac{\rho_{\nu_\varepsilon}\theta}{1+\rho_{\nu_\varepsilon}\theta} + \sum_{n=\nu_\eta+1}^{\infty} 2^{-n} \\
&\leq \rho_{\nu_\eta}\theta + \varepsilon/4 < \varepsilon/2
\end{aligned}$$

pur di scegliere $\theta = \theta_\varepsilon < \frac{\varepsilon}{4\rho_{\nu_\eta}}$.
Vale, dunque, la seguente catena di inclusioni, ove $\varepsilon > 0$ è arbitrariamente fissato:

$$co(K_0) \subseteq \bigcup_{u\in H} B_\delta(u,\varepsilon/2) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_\delta(v_j,\varepsilon),$$

che mostra che $co(K_0)$ è totalmente limitato rispetto a δ. Pertanto $co(K_0)$ è relativamente debolmente compatto e quindi, essendo (K_0, w) metrico, è sequenzialmente relativamente debolmente compatto.
Dato che $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq co(K) \subseteq K_0 \subseteq co(K_0)$, esiste una sottosuccessione $\{p_{n_k}\}$ tale che $p_{n_k} \rightharpoonup p$. Ciò prova che $co(K)$ è sequenzialmente relativamente debolmente compatto. Come osservato all'inizio, la tesi segue dal teorema di Eberlein-Smulyan.

1.4 Continuità e continuità sequenziale

Richiamiamo, ora, la seguente:

Definizione 1.14 *Siano X, Y spazi topologici di Hausdorff. Una funzione $f : X \to Y$ è sequenzialmente continua se per ogni successione $\{x_n\} \subset X$ tale che $x_n \to x$ in X, si ha che $f(x_n) \to f(x)$.*

Si può mettere in relazione la sequenziale continuità con la continuità grazie alla seguente:

Proposizione 1.15 *Siano X, Y spazi topologici di Hausdorff, sia $f : X \to Y$.*

(i) Se f è continua allora f è sequenzialmente continua.

(ii) Se f è sequenzialmente continua e se X soddisfa il I assioma di numerabilità (ossia ogni $x \in X$ ha una base d'intorni numerabili),

allora f è continua.

Dimostrazione. (i) Sia $x_n \to x$. Sia U un intorno di $f(x)$ in Y e sia $U = f^{-1}(V)$. Per la continuità di f, U è un intorno di x in X e quindi si ha $x_n \in U$ definitivamente. Pertanto $f(x_n) \in V$ definitivamente, così $f(x_n) \to f(x)$ in Y.
(ii) Sia $x \in X$ e sia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base di intorni di x in X. Se f fosse discontinua in x, esisterebbe un intorno V di $f(x)$ in Y tale che $f^{-1}(V)$ non è un intorno di x in X; quindi esisterebbe $\{x_n\} \subseteq X$ tale che $x_n \in U_n$, $x_n \to x$ in X, ma $x_n \notin f^{-1}(V)$. Allora $f(x_n) \notin V$ e ciò contraddirebbe la sequenziale continuità di f.

Consideriamo ora uno spazio di Banach X con la topologia debole w. Poiché il I assioma di numerabilità non è verificato, in generale esistono funzioni $f : X \to X$ continue ma non sequenzialmente continue. Tuttavia vale il seguente risultato:

Teorema 1.16 *Sia X uno spazio di Banach e sia $K \subseteq X$ un insieme debolmente compatto. Allora ogni $T : K \to K$ debolmente sequenzialmente continua è debolmente continua.*

Tale teorema è una conseguenza del teorema di Arino-Gautier-Penot, se ne riporta, quindi, l'enunciato con relativa dimostrazione qui di seguito.

Teorema 1.17 (Teorema di Arino-Gautier-Penot) *Sia X uno spazio di Banach, sia $C \subseteq X$ un insieme convesso e debolmente compatto. Allora ogni applicazione $f : C \to C$ debolmente sequenzialmente continua ha un punto fisso.*

Dimostrazione. Proviamo che f è debolmente continua. Fatto ciò, il teorema di Schauder dà la tesi. Per provare che f è debolmente continua, cioè continua dallo spazio X, con la topologia debole, in sé, si mostrerà che se $F \subseteq X$ è debolmente chiuso, allora anche $f^{-1}(F)$ lo è.

Sia dunque $F \subseteq X$ debolmente chiuso. Si osservi che $f^{-1}(F)$ è debolmente sequenzialmente chiuso: infatti se $\{x_n\} \subseteq f^{-1}(F)$ è tale che $x_n \rightharpoonup x$ allora $f(x_n) \rightharpoonup f(x)$ con $\{f(x_n)\} \subseteq F$, per l'ipotesi di debole sequenziale continuità. $f(x)$ appartiene, quindi, alla chiusura debole sequenziale di F, ma per il teorema 1.7 appartiene anche alla chiusura debole di F, cioè ad F: $f(x) \in F$, ovvero $x \in f^{-1}(F)$.

Si osservi, ora, che $f^{-1}(F)$ è debolmente relativamente compatto. Infatti

$$f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)}^{w,seq} \subseteq \overline{f^{-1}(F)}^{w} \subseteq \overline{C}^{w} = C,$$

dove l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che C è debolmente compatto in uno spazio di Banach e quindi è debolmente chiuso. Poiché $f^{-1}(F)$ è debolmente sequenzialmente chiuso e poiché, per la catena di disuguaglianze sopra, è contenuto in un debolmente compatto, è debolmente sequenzialmente relativamente compatto. Dal teorema 1.11 di Eberlein-Smulyan $f^{-1}(F)$ è debolmente relativamente compatto.
Usando il lemma 1.9,

$$\overline{f^{-1}(F)}^{w} = \overline{f^{-1}(F)}^{w,seq} = f^{-1}(F),$$

quindi $f^{-1}(F)$ è debolmente chiuso. In questo modo è provata la debole continuità di f ed il teorema.

Capitolo 2

Il teorema di Krasnoselskii

In questo capitolo illustreremo il teorema di Krasnoselskii, dimostrandone anche alcune varianti. Questi risultati saranno utilizzati nei capitoli 3 e 4 per affrontare alcuni problemi relativi a vari tipi di equazioni alle derivate parziali non lineari. Sia il seguente:

Lemma 2.1 *Sia X uno spazio normato, M un suo sottoinsieme e sia $B : M \to X$ una contrazione di costante $\lambda < 1$. Allora $I - B$ è un omeomorfismo da X in $(I - B)(X)$. Inoltre se $(I - B)(X)$ è precompatto, allora anche X lo è.*

Dimostrazione. Chiaramente $I - B$ è continua.
$I - B$ è surgettiva sulla sua immagine; inoltre vale la disuguaglianza

$$\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| \geq \|x-y\|-\|B(x)-B(y)\| \geq (1-\lambda)\|x-y\| \quad (2.1)$$

che fornisce l'iniettività di $I - B$. Esiste, così, la sua inversa che, sempre per la (2.1), è continua. Per la seconda parte della tesi, si osservi che se

$$(I - B)(x_1), \ldots, (I - B)(x_n)$$

è una $(1 - \lambda)\varepsilon$-rete per $(I - B)(X)$, allora la disuguaglianza (2.1) mostra che

$$x_1, \ldots, x_n$$

è una ε-rete per X.

Teorema 2.2 (di Krasnoselskii) *Sia X uno spazio di Banach ed M un sottoinsieme non vuoto chiuso e convesso di X. Si considerino due funzioni $A, B : M \to X$ tali che:*

i) A è continua e $A(M)$ è contenuto in un insieme compatto, *ii) B è una contrazione di costante $\lambda < 1$,*

iii) $A(x) + B(y) \in M$, $\forall\, x, y \in M$.

Allora esiste $y \in M$ punto fisso per $A + B$.

Dimostrazione. Si osservi che, essendo B una contrazione, per ogni $y \in M$ fissato, l'equazione

$$z = Bz + Ay$$

ha un'unica soluzione z in M, per il teorema delle contrazioni. Allora $z = (I - B)^{-1} \circ A(y) \in M$. Ora, $A(M)$ è contenuto in un insieme compatto per l'ipotesi i), $(I - B)^{-1}$ è continuo per il lemma 2.1, dunque $(I - B)^{-1} \circ A(M)$ è contenuto in un insieme compatto di M.
Per il teorema 1.2 (secondo teorema di Schauder), $(I - B)^{-1} \circ A$ ha un punto fisso in M.

Il teorema appena dimostrato presenta alcuni inconvenienti quando si cerca di usarlo nelle applicazioni. Infatti, molto spesso, non si riesce a verificare l'ipotesi iii). In realtà, un'attenta lettura della dimostrazione del teorema, rivela che è sufficiente provare una condizione meno restrittiva: fissato $y \in M$, se x è l'unico punto fisso della mappa di contrazione $x \to Bx + Ay$, allora $x \in M$. Tali riflessioni e la seguente riformulazione del teorema di Krasnoselskii sono illustrate in un articolo di T. A. Burton [B].

Teorema 2.3 *Sia X uno spazio di Banach e sia $M \subset X$ un sottoinsieme non vuoto chiuso e convesso. Se $A : M \to X$ e $B : X \to X$ sono funzioni tali che:*

i) A è continua e $A(M)$ è contenuto in un sottoinsieme compatto di X,

ii) B è una contrazione di costante $\lambda < 1$,

iii) $[x = B(x) + A(y),\ y \in M] \quad \Rightarrow \quad x \in M$;

allora esiste $y \in M$ punto fisso per $A + B$.

La dimostrazione di tale teorema segue esattamente quella di Krasnoselskii. La dimostrazione fornisce anche un altro spunto di riflessione. Nel mostrare la continuità di $(I - B)^{-1}$ si usa la disuguaglianza

$$\|(I - B)x - (I - B)y\| \geq (1 - \lambda)\|x - y\|,$$

e in particolare vale

$$\|(I - B)x\| \geq (1 - \lambda)\|x\|. \tag{2.2}$$

Se si rafforza la (2.2) nella

$$\|(I - B)x\| \geq \|x\| \tag{2.3}$$

si può ricavare la condizione iii) attraverso la seguente:

Proposizione 2.4 *Si supponga che valgano le ipotesi i) e ii) del teorema 2.3. Sia $r > 0$ tale che $M = \{y \in X \mid \|y\| \leq r\}$ e sia inoltre $A(M) \subset M$. Se vale la (2.3), allora la condizione iii) del teorema 2.3 è verificata.*

Dimostrazione. Se $x = B(x) + A(y)$, $y \in M$, allora $(I - B)x = Ay$. Per la condizione (2.3) si ha subito la tesi:

$$\|x\| \leq \|(I - B)x\| = \|Ay\| \leq r \tag{2.4}$$

e l'ultima disuguaglianza deriva dall'ipotesi che $A(M) \subset M$.

Ecco, dunque, un modo concreto per verificare l'ipotesi iii), però nel caso particolare in cui M è la palla chiusa; la sua utilità è illustrata nell'esempio che segue.

Esempio 2.5 *Si consideri la seguente equazione integrale*

$$x(t) = -\alpha \sin^2 t \frac{x^3(t)}{1 + 2x^2(t)} + p(t) + \int_{\infty}^{t} D(t - s)g(x(s))ds, \tag{2.5}$$

dove p, D, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue, p è 2π-periodica e $0 < \alpha < 1$. Si supponga che esista $r > 0$ tale che

$$|x| \leq r \quad \Rightarrow \quad |g(x)| \leq r - \|p\|_\infty \tag{2.6}$$

e si supponga che

$$\int_{-\infty}^{t} |D(t - s)|ds \leq 1 \qquad e \qquad \int_{-\infty}^{t} |D'(t - s)|ds < \infty. \tag{2.7}$$

Allora la (2.5) ammette una soluzione 2π-periodica.

Applichiamo il teorema 2.3 e la proposizione 2.4 agli operatori

$$(Ay)(t) = p(t) + \int_{\infty}^{t} D(t - s)g(y(s))ds$$

e

$$(Bx)(t) = -\alpha \sin^2 t \frac{x^3(t)}{1 + 2x^2(t)},$$

ove X è lo spazio di Banach delle funzioni continue 2π-periodiche con la norma $\| \cdot \|_\infty$ ed $M = \{y \in X \mid \|y\| \leq r\}$. Verifichiamo le ipotesi del teorema 2.3.

- B è una contrazione.
  $B : X \to X$ è, chiaramente, una funzione continua 2π-periodica. Inoltre

$$\|(Bx)(t)-(By)(t)\|_\infty = \left\| -\alpha \sin^2 t \left[\frac{x^3(t)}{1+2x^2(t)} - \frac{y^3(t)}{1+2y^2(t)} \right] \right\|_\infty \tag{2.8}$$

$$\leq \left\| \frac{x^3(t)}{1+2x^2(t)} - \frac{y^3(t)}{1+2y^2(t)} \right\|_\infty . \tag{2.9}$$

  Si consideri ora la funzione continua

$$\frac{x^3}{1+2x^2} = \psi(x).$$

  La derivata prima è

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{3x^2(1+2x^2)-4x^4}{[1+2x^2]^2} = \frac{3x^2+2x^4}{1+4x^2+4x^4} \\ &\leq \frac{3x^2+2x^4}{4x^2+4x^4} \leq \frac{3x^2+3x^4}{4x^2+4x^4} \leq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

  Allora, poiché per il teorema di Lagrange

$$\psi(x) - \psi(y) \leq \frac{3}{4}(x-y)$$

  la (2.8) diventa

$$\|(Bx)(t) - (By)(t)\|_\infty \leq \frac{3}{4}\|x(t) - y(t)\|_\infty$$

  cioè B è una contrazione di costante $\lambda = \frac{3}{4}$.

- A è continua ed $A(M)$ è contenuto in un sottoinsieme compatto di X.
  Si osservi, innanzitutto, che A manda M in M, infatti se $\|y\|_\infty \leq r$ si ha

$$\begin{aligned} |(Ay)(t)| &\leq |p(t)| + |\int_{-\infty}^{t} D(t-s)g(y(s))ds| \\ &\leq \|p\|_\infty + \int_{-\infty}^{t} |D(t-s)||g(y(s))ds. \end{aligned}$$

Usando le condizioni (2.6) e (2.7) si ottiene

$$|(Ay)(t)| \leq \|p\|_\infty + (r - \|p\|_\infty) \int_{-\infty}^{t} |D(t-s)|ds \leq r$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, dunque $\|(Ay)\|_\infty \leq r$. Inoltre A è una funzione 2π-periodica, infatti:

$$(Ay)(t+2\pi) = p(t+2\pi) + \int_{-\infty}^{t+2\pi} D(t+2\pi-s)g(y(s))ds;$$

ma $p(t)$ è una funzione 2π-periodica per ipotesi e con il cambiamento di variabile $s - 2\pi = \sigma$ si ottiene

$$\begin{aligned}(Ay)(t+2\pi) &= p(t) + \int_{-\infty}^{t} D(t-\sigma)g(y(\sigma+2\pi))d\sigma = \\ &= p(t) + \int_{-\infty}^{t} D(t-\sigma)g(y(\sigma))d\sigma = \\ &= (Ay)(t)\end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza segue perché M è un insieme di funzioni 2π-periodiche, per cui $y(\sigma+2\pi) = y(\sigma)$. Inoltre A è continua perché p, D e g lo sono e $\int_{-\infty}^{t} D(t-s)g(y(s))ds$ converge; infatti

$$\left|\int_{-\infty}^{t} D(t-s)g(y(s))ds\right| \leq \int_{-\infty}^{t} |D(t-s)g(y(s))|ds,$$

ma dato che $|y(s)| \leq r$, per la (2.6) e la (2.7), si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} |D(t-s)||g(y(s))|ds &\leq \int_{-\infty}^{t} |D(t-s)|[r - \|p\|_\infty]ds \\ &\leq [r - \|p\|_\infty] \int_{-\infty}^{t} |D(t-s)|ds \leq r - \|p\|_\infty.\end{aligned}$$

Si noti, ora, che A manda M in un sottoinsieme equicontinuo $K \subseteq M$: in altre parole proviamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\|x-y\|_\infty < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|A(x) - A(y)\|_\infty < \varepsilon$$

.

Sia infatti $\varepsilon > 0$: poiché g è uniformemente continua su $[-r, r]$, possiamo scegliere δ_ε tale che si abbia

$$|u-v| < \delta_\varepsilon,\ u, v \in [-r, r] \Rightarrow |g(u) - g(v)| < \varepsilon;$$

pertanto se $x, y \in M$ si ha:

$$\|x - y\|_\infty < \delta_\varepsilon \Rightarrow |g(x(t)) - g(y(t))| < \varepsilon$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Si ha allora, se $x, y \in M$, e $\|x - y\|_\infty < \delta_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} |(Ax)(t) - (Ay)(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{t} D(t-s)[g(x(s)) - g(y(s))]ds \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{-\infty}^{t} |D(t-s)|ds \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è giustificata dalla (2.7).
Osserviamo adesso che K è anche equilimitato, essendo, grazie alla (2.6),

$$\|A(y(t))\|_\infty \leq \|p\|_\infty + \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t} |D(t-s)|ds \cdot (r - \|p\|_\infty) \leq r$$

per ogni $y \in M$. Allora, per il teorema di Ascoli-Arzelà, K è compatto.

- $[x = B(x) + A(y),\ y \in M] \quad \Rightarrow \quad x \in M$.
  Verifichiamo che valga la 2.3 così per la proposizione 2.4 si avrà la tesi.

  $$(I - B)x(t) = x(t) + \alpha \sin^2 t \frac{x^3(t)}{1 + 2x^2(t)} = x(t) \left[1 + \frac{\alpha \sin^2 t\, x^2(t)}{1 + 2x^2(t)} \right],$$

  da cui si ricava:

  $$x(t) = \left| \frac{(I - B)x(t)}{1 + \dfrac{x^2(t)}{1 + 2x^2(t)}} \right| \leq |(I - B)x(t)|$$

  per ogni $t \in \mathbb{R}$, quindi, passando alle norme, si ottiene

  $$\|x\|_\infty \leq \|(I - B)x\|_\infty$$

  cioè la 2.3.

Per il teorema 2.3 esiste una funzione $x \in X$, punto fisso per $A + B$, ovvero una soluzione 2π-periodica per la (2.5). Ciò completa la dimostrazione.

2.1 Altre versioni del teorema di Krasnoselskii

Altre modifiche al teorema di Krasnoselskii sono ad opera di Cleon S.Barroso ed Eduardo V.Teixeira [BT] e sono illustrate qui di seguito.

Teorema 2.6 *Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e di Hausdorff e sia M un suo sottoinsieme chiuso e convesso. Siano $A : M \to X$ e $B : X \to X$ operatori continui tali che:*

a) $A(M)$ è relativamente compatto,

b) $I - B$ è iniettiva,

c) $A(M) \subseteq (I - B)(M)$,

d) $(I - B)^{-1} \circ A$ è continua.

Allora $A + B$ ha un punto fisso in M.

Dimostrazione. È subito mostrato come dall'ipotesi b) deriva la seguente proprietà:

$$(a_1) \qquad \text{se} \quad u = B(u) + A(v) \text{ per qualche } v \in M, \text{ allora } u \in M.$$

Infatti, da $u = B(u) + A(v)$ segue $A(v) = (I - B)(u)$; poiché $A(M) \subseteq (I - B)(M)$ esiste u_1 in M tale che $(I - B)(u_1) = A(v) = (I - B)(u)$. Dall'iniettività di $(I - B)$ segue $u = u_1 \in M$.

Si definisca, ora, la mappa $T : M \to M$

$$Tu := (I - B)^{-1} \circ A(u).$$

È una buona definizione per le ipotesi b) e c). Per dimostrare che $A + B$ ha un punto fisso in M è necessario ricondursi al teorema di Schauder-Tychonoff applicato alla mappa T. Sono da verificare, pertanto, le ipotesi di tale teorema.

Per la proprietà (a_1) appena dimostrata, T manda M in M. Infatti, preso u in M, $T(u) = (I - B)^{-1} \circ A(u)$ ovvero $(I - B)T(u) = A(u)$ cioè $T(u) = BT(u) + A(u)$, dunque $Tu \in M$.

Inoltre per l'ipotesi d) T è continua. Resta da verificare che $T(M)$ sia relativamente compatto.

Per ipotesi $A(M)$ è relativamente compatto, cioè $\overline{A(M)}$ è compatto; anche $(I - B)^{-1} \circ \overline{A(M)}$ è compatto perché $(I - B)^{-1}$ continua. Ora,

$\overline{(I-B)^{-1} \circ A(M)} \subseteq (I-B)^{-1} \circ \overline{A(M)}$ per una proprietà delle funzioni continue fra spazi topologici; quindi anche $\overline{(I-B)^{-1} \circ A(M)}$ è compatto poiché è un chiuso contenuto in un compatto. Allora $(I-B)^{-1} \circ A(M)$ è relativamente compatto.

La mappa T, soddisfacendo tutte le ipotesi del teorema di Schauder-Tychonoff, ammette un punto fisso u in M.

A questo punto, da $u = T(u) = (I-B)^{-1} \circ A(u)$ si ricava $(I-B)u = A(u)$ cioè

$$u = Bu + Au$$

quindi $A + B$ ha un punto fisso in M.

Teorema 2.7 *Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e di Hausdorff e sia M un suo sottoinsieme convesso e compatto. Siano $A : M \to X$ e $B : X \to X$ operatori continui tali che:*

a) esiste una successione $\lambda_n \to 1$ tale che $(I - \lambda_n B)$ è iniettiva

b) $A(M) \subseteq (I - \lambda_n B)(M)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora $A + B$ ha un punto fisso in M.

Dimostrazione. Fissiamo un $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Innanzitutto vale la seguente proprietà:

$$(b_1) \qquad \text{se} \quad u = \lambda_n B(u) + A(v) \quad \text{per qualche} \quad v \in M \quad \text{allora} \quad u \in M.$$

Infatti, se $u = \lambda_n B(u) + A(v)$ allora $(I - \lambda_n B)(u) = A(v)$; per ipotesi, però, $A(M) \subseteq (I - \lambda_n B)(M)$ per ogni n, quindi esiste $w \in M$ tale che

$$(I - \lambda_n B)(w) = A(v) = (I - \lambda_n B)(u).$$

Per l'iniettività di $(I - \lambda_n B)$ segue $w = u \in M$.

Verifichiamo, ora, l'esistenza di un punto fisso in M per $A+B$. Si può applicare, anche in questo caso, il teorema di Schauder-Tychonoff. Si definisca la funzione:

$$T_n(u) = (I - \lambda_n B)^{-1} \circ A(u), \; n \in N.$$

T_n va da M in M per la proprietà (b_1) dimostrata all'inizio.
Per verificare la continuità dell'operatore T_n per ogni n, è necessario mostrare che preso un net ξ_γ in M

$$\xi_\gamma \to \xi \in M \quad \Rightarrow \quad T_n(\xi_\gamma) \to T_n(\xi).$$

Sia $(I-\lambda_n B)^{-1} \circ A(\xi_\gamma) = \psi_\gamma \in M$. Poiché M è compatto per ipotesi, esiste un sotto-net $\{\psi_{\gamma'}\}_{\gamma' \in I'}$, $I' \subseteq I$ (I insieme filtrante di ψ_γ) tale che $\psi_{\gamma'} \to \psi$ in M; inoltre $(I-\lambda_n B)(\psi_{\gamma'}) \to \psi$ per l'ipotesi di continuità di B.

Si deve dimostrare che $\psi = (I-\lambda_n B)^{-1} \circ A(\xi)$. Ora, $\xi_{\gamma'}$ continua a convergere a ξ e scrivo ancora $(I-\lambda_n B)^{-1} \circ A(\xi_{\gamma'}) = \psi_{\gamma'}$. Da quest'ultima uguaglianza si ha $A(\xi_{\gamma'}) = (I-\lambda_n B)(\psi_{\gamma'})$, inoltre $A(\xi_{\gamma'}) \to A(\xi)$ per l'ipotesi di continuità di A. Allora $(I-\lambda_n B)(\psi_{\gamma'}) = A(\xi_{\gamma'}) \to (I-\lambda_n B)(\psi) = A(\xi)$ per l'unicità del limite. Così $\psi = (I-\lambda_n B)^{-1} \circ A(\xi)$.

A questo punto la continuità di $(I-\lambda_n B)^{-1} \circ A = T_n$ va accertata per l'intero net ψ_γ e non solo per un suo sotto-net.
Si supponga per assurdo che ψ_γ non converga a ψ, cioè che esista un intorno U di ψ tale che per ogni $\gamma \in I$ insieme filtrante, esista $\gamma^* > \gamma$ per cui $\psi_{\gamma*} \notin U$.
Si osservi che

$$I^* = \{\gamma^* \in I | \psi_{\gamma*} \notin U\}$$

è un insieme filtrante, cioè per ogni $i^*, j^* \in I^*$, esiste $h^* \in I^*$ tale che $h^* > i^*, j^*$. Infatti $i^*, j^* \in I$ insieme filtrante, quindi esiste $h \in I$ tale che $h > i^*, j^*$. Sapendo che per ogni $h \in I$ esiste $h^* > h$ tale che $\psi_{h*} \notin U$, si ha

$$h^* > h > i^*, j^*, \text{ con } h^* \in I^*.$$

Allora $\{\psi_{\gamma*}\}_{\gamma* \in I^*}$ è un net contenuto in M; ma M è compatto, quindi si può estrarre un sotto-net $\{\psi_{\gamma''}\}_{\gamma'' \in I''}, I'' \subseteq I^*$ tale che $\psi_{\gamma''} \to \theta$ in M. Per lo stesso ragionamento seguito per il sotto-net $\psi_{\gamma'}$, siccome $\xi_{\gamma''}$ continua a convergere a ξ, allora $\theta = (I-\lambda_n B)^{-1} \circ A(\xi) = \psi$; assurdo perché $\psi_{\gamma''} \notin U$ intorno di ψ, $I'' \subseteq I^*$, per come ho costruito I^*.

Resta da verificare che $T_n(M)$ è relativamente compatto. Per quanto appena dimostrato $T_n = (I-\lambda_n B)^{-1} \circ A$ è continua ed essendo M compatto, $T_n(M)$ è compatto. $T_n(M)$ è anche chiuso perché compatto di uno spazio di Hausdorff. Ne consegue che $T_n(M)$ è relativamente compatto.

Sono verificate le ipotesi del teorema 1.3 di Schauder-Tychonoff, dunque T_n ha un punto fisso u_n in M. Si ha quindi

$$\begin{aligned} u_n = T_n(u_n) = (I-\lambda_n B)^{-1} \circ A(u_n) \Rightarrow \\ (I-\lambda_n B)(u_n) = A(u_n) \Rightarrow \\ u_n - \lambda_n B(u_n) = A(u_n) \quad \text{cioè} \\ u_n = A(u_n) + \lambda_n B(u_n). \end{aligned}$$

Allora $A + \lambda_n B$ ha un punto fisso u_n in M. Questo risultato vale per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi, essendo M compatto, a meno di sotto-successioni, $u_n \to u$ in M. Passando al limite e ricordando che $\lambda_n \to 1$ per ipotesi, si ha la tesi:

$$u_n = A(u_n) + \lambda_n B(u_n) \to u = A(u) + B(u).$$

Un'altra versione del teorema di Krasnoselskii richiede che B sia una contrazione invece di richiedere l'invertibilità di $(I - B)$ o che $A(M) \subseteq (I - B)(M)$, come visto fino ad ora. Prima di enunciarla, quindi, è necessario dare alcune definizioni.

Definizione 2.8 *Sia X uno spazio vettoriale topologico e localmente convesso ed M un suo sottoinsieme. Sia $\mathcal{T}$ una famiglia di seminorme che definisce la topologia in X. Un operatore $B : X \to X$ è una $\mathcal{T}$-*contrazione *se per ogni $\rho \in \mathcal{T}$ esiste $\lambda_\rho \in (0, 1)$ tale che*

$$\rho(B(u) - B(v)) \leq \lambda_\rho \rho(u - v).$$

Definizione 2.9 *Sia M un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio vettoriale topologico, X, localmente convesso e di Hausdorff. Siano $A : M \to X$ e $B : X \to X$ operatori continui. Si indichi con $\mathcal{F} = \mathcal{F}(M, A, B)$ l'insieme*

$$\mathcal{F} = \{u \in X : u = B(u) + A(v) \quad \textit{per qualche } v \in M\}.$$

Teorema 2.10 *Sia M un sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio di Banach X. Siano $A : M \to X$ e $B : X \to X$ due operatori tali che:*

a) A è debolmente continua per successioni,

b) B è una λ-contrazione,

c) Se $u = B(u) + A(v)$ per qualche v in M, allora $u \in M$,

d) Se u_n è una successione in $\mathcal{F}$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ per qualche $u \in M$, allora $B(u_n) \rightharpoonup B(u)$,

e) L'insieme $\mathcal{F}$ è relativamente debolmente compatto.

Allora $A + B$ ha un punto fisso in M.

Dimostrazione. Questa volta si farà uso del teorema 1.1 di Schauder. Si richiede quindi un sottoinsieme convesso e debolmente compatto di X, che non sarà M ma un suo sottoinsieme e un operatore debolmente continuo che mandi questo sottoinsieme in se stesso.

Prima una serie di osservazioni utili.

Fissato $u \in M$, l'applicazione $S : X \to X$ che a v associa $B(v) + A(u)$ è una contrazione perché B lo è per ipotesi. Poiché X è uno spazio di Banach esiste un unico punto fisso $\overline{v} = B(\overline{v}) + A(u)$ che dipenderà dall'u fissato. Indicato $\overline{v}$ con $T(u)$, dove T è la funzione che associa ad ogni u il suo punto fisso, ho $T(u) = BT(u) + A(u)$.
Allora $T(u) \in M$ per l'ipotesi c) e la funzione $T : M \to M$ è ben definita. Infine si osservi che $T(M) \subset \mathcal{F}$ per come è definito $\mathcal{F}$.

Cominciamo, dunque, a mostrare che T è sequenzialmente debolmente continua in M. Sia u_n una successione in M, si deve verificare che

$$u_n \rightharpoonup u \in M \quad \Rightarrow \quad T(u_n) \rightharpoonup T(u).$$

$T(u_n) \in \mathcal{F}$ ed $\mathcal{F}$ è relativamente debolmente compatto per l'ipotesi e); per il lemma 1.12, a meno di sottosuccessioni, $T(u)_n \rightharpoonup w$, per qualche $w \in M$. Ora, per l'ipotesi d), $BT(u_n) \rightharpoonup B(w)$ mentre, per l'ipotesi a), $A(u_n) \rightharpoonup A(u)$. Tornando all'uguaglianza $T(u_n) = BT(u_n) + A(u_n)$ e passando al limite, si ottiene

$$w = B(w) + A(u).$$

Fissato u, si sa che esiste un unico $T(u)$ tale che

$$T(u) = BT(u) + A(u),$$

per cui $T(u) = w$.

Cerchiamo, ora, un sottoinsieme C di X convesso e debolmente compatto tale che $T(C) \subseteq C$. $\mathcal{F}$ è un insieme relativamente debolmente compatto e per renderlo convesso basta prenderne il suo inviluppo convesso $\overline{co}(\mathcal{F})$. Il teorema 1.13 di Krein-Smulyan assicura che $\overline{co}(\mathcal{F})$ è ancora debolmente compatto.

Posto $C = \overline{co}(\mathcal{F})$, si osservi che per l'ipotesi c) $\mathcal{F} \subset M$. Allora $\overline{co}(\mathcal{F}) \subset \overline{co}(M)$ per definizione di inviluppo convesso, ma M è chiuso e convesso e quindi $\overline{co}(M) = M$. Resta da vedere se $T(C) \subset C$. E infatti

$$C \subset M \Rightarrow T(C) \subset T(M) \subset \mathcal{F} \subset \overline{co}(\mathcal{F}) = C.$$

Allora T è sequenzialmente debolmente continua su un compatto e quindi è debolmente continua per il teorema 1.17 di Arino-Gautier-Penot.
Sono dunque verificate tutte le ipotesi del teorema 1.1 di Schauder e applicandolo si trova un punto fisso $u \in C$ per l'operatore T. Di conseguenza si ha un punto fisso per la somma di operatori $A + B$, in quanto

$$u = T(u) = B(T(u)) + A(u) = B(u) + A(u).$$

Un'ultima versione di teorema di punto fisso che proponiamo richiede la dimostrazione delle due proposizioni che seguono.

Proposizione 2.11 *Sia X uno spazio di Banach e sia M un sottoinsieme convesso e debolmente compatto di X. Sia $B \in \mathcal{L}(X)$ tale che $\|B^p\| \leq 1$ per qualche $p \geq 1$ ed $A : M \to X$ un operatore debolmente continuo. Si supponga che valga la seguente condizione:*

i) $[x = \lambda B(x) + A(y)$ *con* $y \in M$ *e* $\lambda \in (0, 1)] \Rightarrow x \in M$.

Allora esiste un punto fisso per $A + B$ in M.

Dimostrazione. Per $0 < \lambda < 1$ si definisca $B_\lambda = \lambda B$. Allora $B_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ e $\|B^p_\lambda\| < 1$. Fissato λ, per il teorema delle contrazioni, per ogni $y \in M$ fissato esiste un unico $x \in X$ tale che $x = B_\lambda(x) + A(y)$ e, per la i), $x \in M$.
Ora, sia

$$T = (I - B^p_\lambda)^{-1} \sum_{k=0}^{p-1} B^k_\lambda. \tag{2.10}$$

T è ben definita e per la (2.10) è lineare e continua su X. Inoltre:

$$T(I - B_\lambda) = (I - B_\lambda)T = I.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} T(I - B_\lambda) &= T - TB_\lambda = (I - B^p_\lambda)^{-1} \left[\sum_{k=0}^{p-1} B^k_\lambda - \sum_{k=0}^{p-1} B^{k+1}_\lambda \right] = \\ &= (I - B^p_\lambda)^{-1}(I - B^p_\lambda) = I. \end{aligned}$$

Viceversa:

$$\begin{aligned} (I - B_\lambda)T &= (I - B_\lambda)(I - B^p_\lambda)^{-1} \sum_{k=0}^{p-1} B^k_\lambda = (I - B_\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} (B^p_\lambda)^n \sum_{k=0}^{p-1} B^k_\lambda = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B^{pn}_\lambda \sum_{k=0}^{p-1} B^k_\lambda - \sum_{n=0}^{\infty} B^{pn+1}_\lambda \sum_{k=0}^{p-1} B^k_\lambda = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B^{pn}_\lambda (I - B_\lambda) \sum_{k=0}^{p-1} B^k_\lambda = \\ &= (I - B^p_\lambda)^{-1} \left(\sum_{k=0}^{p-1} (B^k_\lambda - B^{k+1}_\lambda) \right) = I. \end{aligned}$$

Si può, quindi, concludere che $T = (I - B_\lambda)^{-1}$.
Si osservi che T è debolmente continuo su X per il teorema 3.9 pag. 58 di [Br]; ma A è debolmente continuo per ipotesi, quindi la funzione $y \to T \circ A(y) = x$, da M in M, è debolmente continua. Inoltre $T \circ A(M)$ è debolmente compatto perché lo è M per ipotesi. Per il teorema 1.1 (di Schauder), esiste $y_\lambda \in M$ punto fisso per $T \circ A$. Al variare di $\lambda \in (0, 1)$ si ha una famiglia $\{y_\lambda\} \subset M$ tale che $y_\lambda = B_\lambda(y_\lambda) + A(y_\lambda)$.
Si prenda, ora, una successione $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $0 < \lambda_n < 1$ tale che $\lambda_n \to 1$ e si consideri la corrispondente successione $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ che soddisfa, dunque, la condizione

$$A(y_n) + \lambda_n(By_n) = y_n \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Poiché M è debolmente compatto per ipotesi, esiste una sottosuccessione $\{y_{n_i}\}$ tale che $y_{n_i} \rightharpoonup y \in M$, quindi $A(y_{n_i}) \rightharpoonup A(y)$ in X perché A debolmente continuo; poi $B(y_{n_i}) \rightharpoonup B(y)$ in X perché $B \in \mathcal{L}(X)$.
Passando al limite nella (2.11) si trova $y \in M$ punto fisso per $A + B$.

Proposizione 2.12 *Sia X uno spazio di Banach e sia $A : X \to X$ una funzione tale che $A(B_R) \subseteq B_R$ per qualche $R > 0$. Se $B \in \mathcal{L}(X)$ è un operatore dissipativo, allora vale la condizione i) della proposizione 2.11.*

Dimostrazione. B è un operatore dissipativo su X per ipotesi. Allora

$$\begin{aligned} \|x\|\|x^*\| &= \langle x^*, x\rangle \le \langle x^*, x\rangle - \lambda\langle x^*, B(x)\rangle = \langle x^*, (I - \lambda B)x\rangle \\ &\le \|x^*\|\|(I - \lambda B)x\| \end{aligned}$$

da cui

$$\|x\| \le \|(I - \lambda B)x\| \qquad \text{per ogni } x \in X,\ \lambda > 0. \tag{2.12}$$

Sia, ora, $\lambda \in (0, 1)$ e si supponga che $x = \lambda B(x) + A(y)$, con $y \in B_R$. Dalla (2.12) si ha

$$\|x\| \le \|(I - \lambda B)x\| = \|A(y)\| \le R$$

dove l'ultima disuguaglianza deriva dall'ipotesi $A(B_R) \subseteq B_R$. Ciò conclude la dimostrazione.

Definizione 2.13 *Sia X uno spazio di Banach e sia $B \in \mathcal{L}(X)$. B è un operatore dissipativo su X se per ogni $x \in X$ e per ogni $x^* \in X^*$ tale che $\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|^2 = \|x\|^2$, si ha*

$$\langle x^*, Bx\rangle \le 0.$$

Osservazione. In uno spazio di Hilbert H la (2.13) è equivalente alla condizione $(x, Bx) \leq 0$ per ogni $x \in H$.

Teorema 2.14 *Sia X uno spazio riflessivo e $B \in \mathcal{L}(x)$ con $\|B^p\| \leq 1$, $p \geq 1$, un operatore dissipativo su X. Se $A : X \to X$ è un operatore debolmente continuo tale che $A(B_R) \subseteq B_R$ per qualche $R > 0$, allora esiste $y \in B_R$ tale che $A(y) + B(y) = y$.*

Dimostrazione. Poiché in uno spazio riflessivo insiemi chiusi, limitati e convessi sono debolmente compatti, le proposizioni 2.11 e 2.12 implicano il teorema 2.14.

Capitolo 3

Un'equazione non lineare

In questo capitolo si applicheranno i teoremi di punto fisso, visti in precedenza, per provare l'esistenza di una soluzione per equazioni con operatori non lineari del tipo:

$$A(u) + \lambda B(u) = u \tag{3.1}$$

dove $A, B : X \to X$, con X spazio di Banach e $\lambda \geq 0$. Prima di tutto, però, sono necessarie le seguenti due definizioni:

Sia X uno spazio di Banach e sia $T : X \to X$ una funzione.

Definizione 3.1 *Si dice che T è di Lipschitz se esiste una costante $K \geq 0$ tale che $\|Tu - Tv\| \leq K\|u - v\|$ per ogni $u, v \in X$.*
In tal caso, la costante di Lipschitz di T, che si indicherà brevemente con $[T]$, è l'estremo inferiore di tali costanti K.

Definizione 3.2 *T è un'*espansione *se per ogni $\lambda > 0$ e per ogni $u \in X$*

$$\|u\| \leq \|u - \lambda Tu\|.$$

Teorema 3.3 *Sia X uno spazio di Banach riflessivo. Siano $A, B : X \to X$ funzioni sequenzialmente debolmente continue tali che:*

1. *esiste $R > 0$ tale che $A(B_R) \subset B_R$ (dove B_R è la palla chiusa di raggio R centrata nell'origine),*
2. *B è di Lipschitz ed è un'espansione su X.*

Allora l'equazione (3.1) ammette soluzioni per ogni $\lambda \geq 0$.

Dimostrazione. Sia $\lambda \geq 0$ e siano $\mathcal{A}, \mathcal{B} : X \to X$ le funzioni così definite:

$$\mathcal{A}(u) = \frac{A(u) + \lambda[B]u}{1 + \lambda[B]} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B}(u) = \frac{\lambda B(u)}{1 + \lambda[B]}.$$

$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono sequenzialmente debolmente continue perché lo sono A e B. Inoltre $\mathcal{A}$ manda B_R in se stessa: infatti se $u \in B_R$ cioè $\|u\| \leq R$ allora

$$\|\mathcal{A}(u)\| = \left\| \frac{A(u) + \lambda[B]u}{1 + \lambda[B]} \right\| \leq \frac{1}{1 + \lambda[B]}(\|A(u)\| + \lambda[B]\|u\|);$$

ma, per l'ipotesi 1), $A(u) \in B_R$ e quindi

$$\|\mathcal{A}(u)\| \leq \frac{1}{1 + \lambda[B]}(R + \lambda[B]R) = R.$$

Per quanto riguarda $\mathcal{B}$, essa è una λ_0-contrazione, dove $\lambda_0 = \dfrac{\lambda[B]}{1 + \lambda[B]}$.
Infatti:

$$\|\mathcal{B}(u) - \mathcal{B}(v)\| = \left\| \frac{\lambda B(u)}{1 + \lambda[B]} - \frac{\lambda B(v)}{1 + \lambda[B]} \right\| = \frac{\lambda}{1 + \lambda[B]}\|B(u) - B(v)\|,$$

ma B è di Lipschitz per l'ipotesi 2) e quindi

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda[B]}\|B(u) - B(v)\| \leq \frac{\lambda}{1 + \lambda[B]}[B]\|u - v\|.$$

Allora abbiamo ottenuto la seguente disuguaglianza:

$$\|\mathcal{B}(u) - \mathcal{B}(v)\| \leq \lambda_0\|u - v\|.$$

A questo punto si può applicare il teorema 2.7 alle funzioni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Devono essere soddisfatte tutte le ipotesi del teorema, occorre: un sottoinsieme M convesso e compatto di uno spazio X, localmente convesso e di Hausdorff e due operatori continui per i quali valgano le ipotesi a) e b) del teorema.

Lo spazio X è uno spazio di Banach dotato della topologia debole e ciò lo rende di Hausdorff e localmente convesso.
A fare le veci di M in questo teorema sarà B_R, che è un sottoinsieme convesso, chiuso e limitato di uno spazio di Banach riflessivo, per cui è debolmente compatto.
Inoltre $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono sequenzialmente debolmente continue, ma, definite su B_R debolmente compatta, sono debolmente continue. Quest'ultima affermazione è una conseguenza del teorema 1.17 di Arino-Gautier-Penot.

Restano allora da verificare le ipotesi a) e b):

a) *iniettività* di $I - \lambda_n \mathcal{B}$ ove λ_n è un'arbitraria successione che tende a 1.
Per assurdo dati $x, y \in X$ con $x \neq y$, sia $(I - \lambda_n \mathcal{B})(x) = (I - \lambda_n \mathcal{B})(y)$. Allora vale

$$x - y = \lambda_n(\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(y)).$$

Passando alle norme e ricordando che $\mathcal{B}$ è una λ_0-contrazione con $\lambda_0 = \dfrac{\lambda[B]}{1+\lambda[B]}$ si ottiene

$$\|x - y\| = \lambda_n \|\mathcal{B}(x) - \mathcal{B}(y)\| \leq \lambda_n \lambda_0 \|x - y\|$$

ovvero

$$1 \leq \lambda_n \lambda_0 \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{\lambda_n} \leq \lambda_0.$$

Poiché $\frac{1}{\lambda_n} \to 1$, si ottiene $\lambda_0 \geq 1$, il che è assurdo.

b)$\mathcal{A}(B_R) \subseteq (I - \lambda_n \mathcal{B})(B_R)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Si sa che $\mathcal{B}(u) = \dfrac{\lambda}{1+\lambda[B]} B(u)$ è una contrazione; quindi, essendo X uno spazio di Banach, essa ha un unico punto fisso $\overline{u} \in X$. Inoltre per l'ipotesi di espansività di B, si ha che

$$\|\overline{u}\| \leq \left\| \overline{u} - \frac{\lambda}{1+\lambda[B]} B(\overline{u}) \right\| = \|\overline{u} - \mathcal{B}(\overline{u})\| = 0$$

in cui l'ultima uguaglianza è vera perché $\overline{u}$ è il punto fisso per $\mathcal{B}$. Pertanto $\overline{u} = 0$.

Ora, poiché $\lambda_n \to 1$, anche $\lambda_n \mathcal{B}$ è una contrazione di costante $\lambda_n \lambda_0 = \dfrac{\lambda_n \lambda[B]}{1+\lambda[B]} < 1$ per n grande. Dato che $\mathcal{B}(0) = 0$, anche $\lambda_n \mathcal{B}$ ha 0 come punto fisso.

Si osservi che, fissato w in B_R, anche $\lambda_n \mathcal{B} + w$ è una contrazione, che ammetterà un unico punto fisso v. Dalla relazione

$$\|v\| \leq \|v - \lambda_n \frac{\lambda}{1+\lambda[B]} B(v)\| = \|v - \lambda_n \mathcal{B}(v)\| = \|w\| < R$$

segue che $v \in B_R$; in particolare, scelto $w = \mathcal{A}(u)$ con $u \in B_R$, per 1) si ha $w \in B_R$ e dunque si conclude che per ogni $u \in B_R$ esiste $v \in B_R$ tale che

$$\mathcal{A}(u) = v - \lambda_n \mathcal{B}(v) = (I - \lambda_n \mathcal{B})(v).$$

Ciò prova che

$$\mathcal{A}(B_R) \subseteq (I - \lambda_n \mathcal{B})(B_R).$$

Le ipotesi del teorema 2.7 sono soddisfatte, per cui $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ ha un punto fisso u in B_R:

$$u = \mathcal{A}(u) + \mathcal{B}(u) = \frac{A(u) + \lambda B(u) + \lambda[B]u}{1+\lambda[B]} \quad \text{cioè}$$
$$Au + \lambda Bu = (1+\lambda[B])u - \lambda[B]u = u$$

ovvero $u \in B_R$ risolve l'equazione (3.1).

Un secondo risultato per la risoluzione dell'equazione (3.1) è il seguente:

Teorema 3.4 *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e $B : X \to X$ una funzione di Lipschitz sequenzialmente debolmente continua. Per ogni $\mu > 0$, sia $A_\mu : X \to X$ una funzione sequenzialmente debolmente continua tale che:*

i) $\|A_\mu(u)\| \leq \mu\|u\|^p + a\|u\|^q + b$

con $p > 1$, $0 < q < 1$ e $a, b > 0$. Allora esiste $\mu^* > 0$ tale che per ogni $\mu \in (0, \mu^*)$ e per ogni $0 \leq \lambda < \frac{1}{[B]}$, l'operatore $A_\mu + \lambda B$ ha un punto fisso.

Dimostrazione. Si può supporre $B(0) = 0$. Sia $\lambda \in [0, \frac{1}{[B]})$ fissato. Sia $M = B_R$ la palla chiusa di X centrata nell'origine di raggio $R > 0$, abbastanza grande in modo che valga la disuguaglianza:

$$\frac{a}{R^{1-q}} + \frac{b}{R} < 1 - \lambda[B].$$

Esiste, allora, $\mu^* > 0$ abbastanza piccolo, tale che valga:

$$\mu^* R^p + aR^q + \lambda[B]R + b \leq R.$$

Pertanto per ogni $\mu \in (0, \mu^*)$, la somma $A_\mu + \lambda B$ manda M in M: infatti se $u \in M$, cioè $\|u\| \leq R$, allora

$$\|A_\mu(u) + \lambda B(u)\| \leq \mu\|u\|^p + a\|u\|^q + b + \lambda\|B(u)\|,$$

quest'ultima disuguaglianza segue per l'ipotesi i).

Si osservi che B è di Lipschitz per ipotesi, con $B(0) = 0$, dunque $\|B(u)\| \leq [B]\|u\|$. Mettendo insieme tutte queste informazioni:

$$\|A_\mu(u)+\lambda B(u)\| \leq \mu\|u\|^p+a\|u\|^q+b+\lambda[B]\|u\| \leq \mu R^p+aR^q+b+\lambda[B]R \leq R$$

per come si è scelto μ^* e ricordando che $\mu \in (0, \mu^*)$. Così $A_\mu(u)+\lambda B(u) \in M$.

A questo punto si applica il teorema 1.17 di Arino-Gautier-Penot: $M = B_R$ è un insieme limitato, chiuso e convesso di uno spazio di Banach riflessivo e quindi è debolmente compatto. La somma $A_\mu + \lambda B$ è sequenzialmente debolmente continua, perché lo sono A_μ e B per ipotesi, e manda M in M. Così il teorema assicura l'esistenza di un punto fisso per $A_\mu + \lambda B$.

Un terzo ed ultimo risultato prende in considerazione il caso in cui B è un operatore costante.

Teorema 3.5 *Sia X uno spazio di Banach e $A : X \to X$ un operatore compatto tale che:*

(i) $\|A(u)\| \leq a\|u\|^p$,

con $a > 0$ e $p > 1$. Allora esiste $R > 0$ tale che per ogni $h \in B_R$ l'equazione

$$A(u) + h = u$$

ammette almeno una soluzione.

Dimostrazione. Per ogni $r > 0$ si ponga

$$\delta_r = \sup_{\|x\| \leq r} \|A(x)\|.$$

Per l'ipotesi (i) si può scegliere $\sigma > 0$ sufficientemente piccolo in modo che

$$\sup_{0<r<\sigma} \frac{\delta_r}{r} < 1;$$

dunque per ogni $r \in (0, \sigma)$ si ha $\delta_r < r$, da cui, se $\|x\| \leq r$, si ricava $\|A(x)\| \leq \delta_r < r$.

Sia allora $R \in (0, r - \delta_r)$, sia $h \in B_R$ e definiamo la funzione $T : X \to X$ come $T(x) = A(x) + h$.
Passando alle norme si ottiene $\|T(x)\| \leq \|A(x)\| + \|h\| \leq \delta_r + R < \delta_r + r - \delta_r = r$, per ogni $x \in B_R$.

Allora T manda B_R in se stessa, è debolmente continua perché A è un operatore compatto e B è costante; inoltre l'operatore T è compatto perché lo è A, per cui manda B_R in un suo sottoinsieme compatto. Per il secondo teorema di Schauder 1.2 esiste un punto fisso u per $A + h$ nella palla B_R.

Capitolo 4

Un'equazione ellittica

Un'altra applicazione riguarda la ricerca di soluzioni per alcune equazioni ellittiche non lineari. Prima di procedere con lo studio di tali equazioni, è utile richiamare alcune definizioni.

4.1 Spazi di Sobolev

Definizione 4.1 *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un insieme aperto e sia* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Sia* $i \in \{1, \ldots, N\}$. *Se esiste* $g_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tale che*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega g_i(x)\phi(x)dx, \quad \textit{per ogni } \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

tale g_i *è detta* derivata debole *di* u. *Si indichi con* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ *la derivata debole di* u.

È una buona definizione perché se la derivata debole esiste, essa è unica, come mostra il seguente lemma:

Lemma 4.2 *Per ogni* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, *se*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = 0 \quad \textit{per ogni } \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

allora $f(x) = 0$ *per quasi ogni* $x \in \Omega$.

Dimostrazione. Si consideri il caso in cui f è continua in Ω:
supponiamo per assurdo che esista $x_0 \in \Omega$ tale che $f(x_0) \neq 0$, ad esempio $f(x_0) > 0$. Allora esiste $B(x_0, r) \subset \Omega$, palla di raggio r centrata in x_0, in

cui $f > 0$. Se $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ è una funzione a campana non negativa il cui supporto (non vuoto) è contenuto in $B(x_0, r)$, allora

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx > 0$$

che contraddice l'ipotesi.
Consideriamo ora il caso generale $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Sia $\Omega' \subset\subset \Omega$ un aperto. Allora $f \in L^1(\Omega')$ e, per ipotesi,

$$\int_{\Omega'} f(x)\phi(x)dx = 0$$

per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega')$.
Sia ora $g \in C_0^0(\Omega')$ tale che $\int_{\Omega'} |f - g|dx < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Allora

$$\left|\int_{\Omega'} g\phi dx\right| \leq \varepsilon\|\phi\|_\infty \quad \text{per ogni } \phi \in C_0^\infty(\Omega')$$

e quindi, per densità di $C_0^\infty(\Omega')$ in $C_0^0(\Omega')$ nella norma uniforme,

$$\left|\int_{\Omega'} g\phi dx\right| \leq \varepsilon\|\phi\|_\infty \quad \text{per ogni } \phi \in C_0^0(\Omega').$$

Ora definiamo $K = K_1 \cup K_2$ dove

$$K_1 = \{x \in \Omega' \,:\, g(x) \geq \varepsilon\}, \qquad K_2 = \{x \in \Omega' \,:\, g(x) \leq -\varepsilon\}.$$

Scelgo $\psi \in C_0^0(\Omega')$ tale che $|\psi| \leq 1$, $\psi = 1 \,\text{su}\, K_1 \,\text{e}\, \psi = -1 \,\text{su}\, K_2$. Allora in $\Omega' \setminus K$ si ha $|g\psi| \leq |g| < \varepsilon$ e quindi

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^1(\Omega')} &= \int_{K_1} |g|dx + \int_{K_2} |g|dx + \int_{\Omega'\setminus K} |g|dx = \\
&= \int_K g\psi dx + \int_{\Omega'\setminus K} |g|dx = \\
&= \left|\int_{\Omega'} g\psi dx\right| - \int_{\Omega'\setminus K} g\psi dx + \int_{\Omega'\setminus K} |g|dx = \\
&= \varepsilon + \int_{\Omega'\setminus K} |g| - |g\psi dx = \varepsilon[1 + m(\Omega' \setminus K)].
\end{aligned}$$

Perciò si ha anche:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1(\Omega')} &\leq \|f - g\|_{L^1(\Omega')} + \|g\|_{L^1(\Omega')} \leq \\
&\leq \varepsilon[2 + m(\Omega')]
\end{aligned}$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e quindi $f = 0$ q.o. in Ω'. Per l'arbitrarietà di Ω', $f = 0$ q.o. in Ω.

Definizione 4.3 *Lo spazio di Sobolev*

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) |\, \exists\, g_1, ..., g_n \in L^2(\Omega) \text{ tali che } \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g_i \phi \, dx \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega),\, \forall\, i = 1, ..., N\}.$$

Si pone $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$.
Lo spazio $W^{1,2}(\Omega)$ *è munito della norma:*

$$\|u\|_{W^{1,2}} = \|u\|_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}$$

e del prodotto scalare:

$$(u, v)_{W^{1,2}} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}.$$

Definizione 4.4 $W_0^{1,2}(\Omega)$ *indica la chiusura di* $C_0^\infty(\Omega)$ *in* $W^{1,2}(\Omega)$.

Definizione 4.5 *Lo spazio di Sobolev*

$$W^{2,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) |\, \forall\, \alpha \text{ con } |\alpha| \leq 2 \quad \exists\, g_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ tale che } \int_\Omega u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \phi \quad \forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega)\}$$

dove α *è un multi-indice, cioè una* N*-upla* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ *con* $\alpha_i \geq 0$ *intero e si pone*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \qquad e \qquad D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N} \phi}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_N}^{\alpha_N}}.$$

Lo spazio $W^{2,2}(\Omega)$ *è munito della norma:*

$$\|u\|_{W^{2,2}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} \|D^\alpha u\|_{L^2}$$

e del prodotto scalare:

$$(u, v)_{W^{2,2}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 2} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$

Lo spazio

$$W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) = \{u \in W^{2,2}(\Omega) : u = 0 \, \text{su} \, \partial\Omega\}.$$

Definizione 4.6 *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato. A ha frontiera C^1 se per ogni $x_0 \in \partial A$, esiste U intorno di x_0 in $\mathbb{R}^N$ ed esiste $\phi : U \to \mathbb{R}$ di classe C^1, con $\nabla\phi \neq 0$ in U tale che*

$$A \cap U = \{x \in U \, : \, \phi(x) < 0\} \quad e \quad A^c \cap U = \{x \in U \, : \, \phi(x) > 0\}.$$

Osservazione: in modo analogo si definiscono gli aperti di classe C^k e $C^{k,\alpha}$, dove $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in (0, 1]$.

Si ricordino, infine, due importanti teoremi di immersione degli spazi di Sobolev:

Teorema 4.7 (di Sobolev) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato di classe C^1. Valgono i seguenti fatti:*

se $p < N$ allora $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [1, p^*[$ e $1/p^* = 1/p - 1/N$;

se $p = N$ allora $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [1, \infty[$;

se $p > N$ allora $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,

e le immersioni sono compatte.

Teorema 4.8 (di Rellich-Kondrachov) *: Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato di classe $C^{0,1}$. Allora*

$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ se $mp < N$ e $1 \leq q < \frac{Np}{N-mp}$

$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ se $mp = N$, e $1 \leq q < \infty$

$W^{m,p}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ se $mp > N$, $0 < \alpha < m - \frac{N}{p}$

sono immersioni compatte.

4.2 Il problema di Dirichlet

Si indichi $-\Delta$ con L. Dato un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, con bordo $\partial\Omega \in C^2$, e data $f \in L^2(\Omega)$, si consideri il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Allora esiste sempre una soluzione $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ di tale problema ed essa è unica. Inoltre vale la seguente disuguaglianza:

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega)} + \|u\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq C\|Lu\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.1}$$

dove C è una costante strettamente positiva che dipende da Ω ed N. Per la dimostrazione si rimanda a [GT] teorema 8.12.
L'operatore

$$L : W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

è chiaramente lineare perché somma di derivate seconde.
È surgettivo, infatti per ogni $f \in L^2(\Omega)$ esiste un unico $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che $-\Delta u = f$.
È iniettivo perché se $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ e se $-\Delta u = 0$ allora, necessariamente, $u = 0$. Dunque, è invertibile.
Inoltre L è continuo perché

$$\|Lu\|_{L^2(\Omega)} = \| - \Delta u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{2,2}(\Omega)}.$$

Allora, per il teorema dell'applicazione aperta, anche

$$L^{-1} : L^2(\Omega) \to W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$$

è una funzione continua. In particolare

$$L^{-1} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

è un operatore compatto, infatti:

$L^{-1} : L^2(\Omega) \to W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ è una funzione continua

$i : W^{2,2}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ è un'immersione compatta per il teorema 4.8 di Rellich-Kondrachov.

allora, componendo, $L^{-1} \circ i = L^{-1}$ è compatto in quanto composizione di un operatore continuo con un operatore compatto.

Vale, inoltre, la seguente disuguaglianza:

Proposizione 4.9 *Si supponga che*

$$(H_p)\begin{cases} p > 1/2 & \textit{se } N = 3, 4 \\ 1 < p \leq \frac{N}{N-4} & \textit{se } N > 4. \end{cases}$$

Allora per ogni u in $W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\|u\|_{L^{2p}(\Omega)} \leq \gamma \|Lu\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.2}$$

dove γ è una costante che dipende da p, N, Ω.

Dimostrazione. Sia $1/2 < p < \infty$. Se $N = 3$, poiché valgono le inclusioni continue $W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$, segue che $\|w\|_{L^{2p}(\Omega)} \leq \gamma \|w\|_{W^{2,2}(\Omega)}$, $\forall\, w \in W^{2,2}(\Omega)$. Usando, allora, la disuguaglianza (4.1), si ha la tesi. Allo stesso modo, se $N = 4$, dall'inclusione $W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ e dalla disuguaglianza (4.1) si ha la conclusione. Infine, se $N > 4$ e $1/2 < p < \frac{N}{N-4}$, si usano le inclusioni $W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-4}}(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$ e ancora la disuguaglianza (4.1).

4.3 L'operatore di superposizione

Altre nozioni utili da richiamare sono le seguenti definizioni:

Definizione 4.10 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto e sia $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che:*

i) $x \mapsto f(x, t)$ è misurabile in Ω per ogni $t \in \mathbb{R}$

ii) esiste un insieme misurabile $\Omega_0 \subseteq \Omega$ tale che $mis(\Omega - \Omega_0) = 0$ e $t \mapsto f(x, t)$ è continua su $\mathbb{R}$ per ogni $x \in \Omega_0$.

Allora f si dice di Caratheodory.

Definizione 4.11 *Siano Ω ed f come nelle ipotesi della definzione 4.10. Si ponga*

$$[\Phi(u)](x) = f(x, u(x)), \qquad x \in \Omega;$$

l'applicazione $u \mapsto \Phi(u)$ si chiama operatore di Nemytskii o di superposizione.

Si osservi, anzitutto, che se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è misurabile, allora $\Phi(u)$ è a sua volta misurabile. Infatti, questo è vero quando u è una funzione semplice: se $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{E_i}$, con gli E_i disgiunti e $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \Omega$, si ha

$\Phi(u) = \sum_{i=1}^{k} f(,\alpha_i)\chi_{E_i}$ e dunque $\Phi(u)$ è misurabile. Mentre se u è misurabile e $\{u_n\}$ è una successione di funzioni semplici che converge ad u puntualmente in Ω, allora $\Phi(u)$ è il limite puntuale in Ω_0, dunque q.o. in Ω, delle funzioni misurabili $\Phi(u_n)$, e dunque è misurabile in virtù della completezza della misura di Lebesgue.
Vale inoltre la seguente proprietà:

Lemma 4.12 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto di misura finita e sia f di Caratheodory. Se $\{u_n\}$ è una successione di funzioni misurabili su Ω tale che $u_n \to u$ in misura, allora $\Phi(u_n) \to \Phi(u)$ in misura.*

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$; si deve provare che

$$\lim_{n\to\infty} m(\{x \in \Omega_0 \,:\, |\Phi(u_n)(x) - \Phi(u)(x)| > \epsilon\} = 0.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ si consideri l'insieme

$$\Omega_k = \left\{ x \in \Omega_0 \,:\, |f(x, u(x)) - f(x,t)| \le \epsilon \quad \forall\, t \in \left[u(x) - \frac{1}{k}, u(x) + \frac{1}{k} \right] \right\}.$$

L'insieme Ω_k è misurabile ed inoltre risulta $\Omega_k \supseteq \Omega_{k+1}$. Per la continuità di f rispetto alla variabile t, si ha $\bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k = \Omega_0$; essendo $m(\Omega_0) = m(\Omega) < \infty$, se ne deduce, in virtù della misurabilità delle Ω_k, che $m(\Omega_0 \setminus \Omega_k) \to 0$ per $k \to \infty$. Dunque, fissato $\eta > 0$, esiste $k \in \mathbb{N}^+$, e si fissi, tale che $m(\Omega_0 \setminus \Omega_k) < \eta/2$.
Si definisca, ora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme

$$A_n = \left\{ x \in \Omega_0 \,:\, |u_n(x) - u(x)| \le \frac{1}{k} \right\};$$

poiché $u_n \to u$ in misura, si ha $\lim_{n\to\infty} m(\Omega_0 \setminus A_n) = 0$ cioè esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$m(\Omega_0 \setminus A_n) < \eta/2 \quad \forall\, n \ge \overline{n}.$$

D'altra parte, se $x \in A_n \cap \Omega_k$ si ha $u_n(x) \in [u(x) - 1/k, u(x) + 1/k]$ e quindi $|\Phi(u_n)(x) - \Phi(u)(x)| \le \epsilon$.
Ne segue, per ogni $n \ge \overline{n}$,

$$\begin{aligned} & m(\{x \in \Omega_0 \,|\, \Phi(u_n)(x) - \Phi(u)(x)| > \epsilon\}) \le \\ & \quad \le m(\Omega_0 \setminus (A_n \cap \Omega_k)) \le \\ & \quad \le m(\Omega_0 \setminus A_n) + m(\Omega_0 \setminus \Omega_k) \le \\ & \quad \le \eta/2 + \eta/2 = \eta, \end{aligned}$$

cioè la tesi.

Una conseguenza del lemma precedente è la continuità dell'operatore Φ su opportuni spazi L^p.

Proposizione 4.13 *Nelle ipotesi precedenti, si supponga che esistano $p, q \geq 1$ tali che*

$$|f(x,t)| \leq a(x) + b|t|^{p/q} \qquad \textit{per q.o. } x \in \Omega,\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

dove $a \in L^q(\Omega)$, con $a \geq 0$, e $b \geq 0$. Allora l'operatore di Nemytskii Φ manda con continuità $L^p(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$.

Dimostrazione. Anzitutto, se $u \in L^p(\Omega)$ si ha $\Phi(u) \in L^q(\Omega)$ perché

$$\int_\Omega |f(x,u(x))|^q dx \leq 2^{q-1}\left[\int_\Omega a(x)^q dx + b^q \int_\Omega |u(x)|^p dx\right].$$

Si deve provare la continuità di Φ. Sia $\{u_n\} \subseteq L^p(\Omega)$ una successione tale che $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$: occorre mostrare che $\Phi(u_n) \to \Phi(u)$ in $L^q(\Omega)$. Dato che, in particolare, $u_n \to u$ in misura, dal lemma 4.12 si ottiene che $\Phi(u_n) \to \Phi(u)$ in misura. Inoltre vale la seguente stima:

$$\begin{aligned}
|\Phi(u_n)(x) - \Phi(u)(x)|^q &\leq 2^{q-1}\left[|\Phi(u_n)(x)|^q + |\Phi(u)(x)|^q\right] \leq \\
&\leq 4^{q-1}\left[a(x)^q + b^q|u_n(x)|^p + a(x)^q + b^q|u(x)|^p\right] \leq \\
&\leq 4^{q-1}\left[2a(x)^q + 2^{p-1}b^q|u_n(x) - u(x)|^p + (2^{p-1}+1)b^q|u(x)|^p\right] \leq \\
&\leq c_{p,q}\left[a(x)^q + |u_n(x) - u(x)|^p + |u(x)|^p\right].
\end{aligned}$$

Sia allora $\epsilon > 0$: esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\|u_n - u\|^p_{L^p(\Omega)} < \epsilon$ per ogni $n \geq \overline{n}$. Per l'assoluta continuità dell'integrale e per la stima precedente, esiste $\eta > 0$ per cui si ha

$$m(E) < \eta, \quad n \geq \overline{n} \quad \Rightarrow \quad \int_E |\Phi(u_n) - \Phi(u)|^q dx \leq 3c_{p,q}\epsilon.$$

Si scelga, ora, $\delta > 0$ tale che $\delta^q < \epsilon$; posto

$$E_n = \{x \in \Omega \,:\, |\Phi(u_n)(x) - \Phi(u)(x)| \geq \delta\},$$

sarà $m(E_n) < \eta$ per ogni $n \geq \overline{\overline{n}} \geq \overline{n}$ per il lemma 4.12. Concludendo, per ogni $n \geq \overline{\overline{n}}$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\Phi(u_n) - \Phi(u)|^q dx &= \int_{E_n} |\Phi(u_n) - \Phi(u)|^q dx + \int_{\Omega\setminus E_n} |\Phi(u_n) - \Phi(u)|^q dx \\
&\leq 3c_{p,q}\epsilon + \delta^q m(\Omega) \leq \\
&\leq C\epsilon,
\end{aligned}$$

e ciò prova la tesi.

4.4 Un'equazione ellittica

Consideriamo la seguente equazione:

$$(-\Delta)^{-1}u + \lambda u = f(x, u, \mu) \,\mathrm{in}\, \Omega, \quad u = 0 \quad \mathrm{su} \quad \partial\Omega \tag{4.3}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato con bordo di classe $C^{1,1}$, λ è un numero reale ed $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Un primo passo verso la risoluzione di tale equazione è ridurla ad un problema di punto fisso nel seguente modo: posto $v = -\Delta u = Lu$ e quindi $L^{-1}(v) = u$, sostituendo si ottiene

$$v + \lambda L^{-1}(v) = N_{f_\mu} \circ L^{-1}(v),$$

dove N_{f_μ} è l'operatore di Nemytskii associato ad f_μ ed L^{-1} è l'inversa dell'opposto del Laplaciano. Risolvere l'equazione (4.3) equivale a risolvere l'equazione

$$v = -\lambda L^{-1}(v) + N_{f_\mu} \circ L^{-1}(v). \tag{4.4}$$

Si può dimostrare che l'equazione (4.4) è soddisfatta da una funzione $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$. Vale, infatti, il seguente:

Teorema 4.14 *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato con bordo di classe $C^{1,1}$. Si supponga che:*

i) $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è una funzione di Caratheodory

ii) $\exists\, \mu > 0$ tale che $N_{f_\mu} \circ L^{-1}$ manda una palla B_R di $L^2(\Omega)$ in se stessa.

Allora per ogni $\lambda \geq 0$ esiste $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ che soddisfa q.o. l'equazione (4.4).

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul teorema 2.14.

Applichiamo il teorema 2.14 agli operatori

$$B = -\lambda L^{-1} \qquad \mathrm{e} \qquad A = N_{f_\mu} \circ L^{-1}$$

dove $0 < \lambda \leq \lambda^* = \dfrac{1}{\|L^{-1}\|_{L^2(\Omega)}}$.
$B \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$, mentre $A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ e manda B_R in sé per l'ipotesi ii). B è un operatore dissipativo su $L^2(\Omega)$ con $\|B\| \leq 1$. Quest'ultima disuguaglianza deriva subito dalla scelta di λ:

$$\begin{aligned} \|B\|_{L^2(\Omega)} = \|-\lambda L^{-1}\|_{L^2(\Omega)} = \ & \lambda \|L^{-1}\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \lambda^* \|L^{-1}\|_{L^2(\Omega)} = 1; \end{aligned}$$

la dissipatività di B deriva dalla prima formula di Green: infatti, se

$$v = -L^{-1}(u) \quad \text{cioè} \quad -Lv = u \quad \text{ovvero} \quad \Delta v = u \quad \text{con} \quad v = 0 \text{ su } \partial\Omega$$

si ha:

$$\begin{aligned}(-L^{-1}u, u)_{L^2(\Omega)} &= (v, u)_{L^2(\Omega)} = \ (v, \Delta v)_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\partial\Omega} v \nabla v \cdot \vec{n} ds - \int_\Omega |\nabla v|^2 dx,\end{aligned}$$

ma $v = 0$ su $\partial\Omega$ quindi si ottiene

$$(-L^{-1}u, u)_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega |\nabla v|^2 dx \leq 0.$$

Allora

$$(Bu, u)_{L^2(\Omega)} = (-\lambda L^{-1}(u), u) = \lambda(-L^{-1}(u), u) \leq 0,$$

per ogni $u \in L^2(\Omega)$.

Verifichiamo, ora, che A è un operatore debolmente continuo su B_R.
In realtà è sufficiente dimostrare che A è debolmente sequenzialmente continuo su B_R. Infatti, essendo $L^2(\Omega)$ uno spazio riflessivo, B_R è debolmente compatta e poiché $L^2(\Omega)$ è anche separabile, B_R munita della topologia debole è uno spazio metrizzabile. A questo punto, segue la debole continuità di A per il teorema 1.15.
Mostriamo, dunque, che A è debolmente sequenzialmente continuo. Sia R definito dall'ipotesi ii) e sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in B_R tale che $u_n \rightharpoonup u \in B_R$. Allora

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq R \quad \text{per cui} \quad \|L^{-1}(u_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \cdot R,$$

con $C = \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))}$. Per l'ipotesi ii) si ha che

$$\|N_{f_\mu} \circ L^{-1}(u_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq R.$$

Per la riflessività di $L^2(\Omega)$, si può estrarre una sottosuccessione $\{u_{n_j}\}$ tale che

$$N_{f_\mu} \circ L^{-1}(u_{n_j}) \rightharpoonup v \in L^2(\Omega).$$

D'altra parte, $L^{-1}(u_{n_j}) \rightharpoonup L^{-1}(u)$ in $W^{2,2}(\Omega)$. Ricordando che $W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ è un'immersione compatta, si ha

$$L^{-1}(u_{n_j}) \to L^{-1}(u) \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

A questo punto, $N_{f_\mu} \circ L^{-1}(u_{n_j}) \rightharpoonup N_{f_\mu} \circ L^{-1}(u)$ in $L^2(\Omega)$ e $v = N_{f_\mu} \circ L^{-1}(u)$. Resta da verificare che tale risultato valga per l'intera successione $\{u_n\}$, ovvero:

$$N_{f_\mu} \circ L^{-1}(u_n) \rightharpoonup N_{f_\mu} \circ L^{-1}(u).$$

Se, per assurdo, così non fosse esisterebbe $g \in L^2(\Omega)$ tale che

$$\left| \int_\Omega [N_{f_\mu} \circ L^{-1}(u_{n_k}) - N_{f_\mu} \circ L^{-1}(u)] g \, dx \right| \geq \delta \tag{4.5}$$

per infiniti indici n_k. Ma $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in B_R e, con lo stesso ragionamento seguito in precedenza, esiste $\{u_{n_{k_j}}\}$ sottosuccessione estratta tale che $N_{f_\mu} \circ L^{-1}(u_{n_{k_j}}) \rightharpoonup N_{f_\mu} \circ L^{-1}(u)$ in $L^2(\Omega)$, contro l'equazione (4.5). Ciò è assurdo.

Valendo tutte le ipotesi del teorema 2.14, l'equazione (4.3) ha soluzione per ogni $\lambda \in (0, \lambda^*)$.
La soluzione per ogni $\lambda \geq 0$ viene fornita dal teorema 3.3 verificando solo l'ipotesi b) di tale teorema. La prima parte è ovvia perché B è lineare e continuo, quindi lipschitziano; per verificare che B è un'espansione, si consideri $(u - \lambda Bu, u)_{L^2(\Omega)}$. Da un lato si sa che

$$(u - \lambda Bu, u) \leq \|u - \lambda Bu\| \|u\|. \tag{4.6}$$

Dall'altro, essendo $(Bu, u) \leq 0$, si può scrivere

$$\|u\|^2 \leq \|u\|^2 - \lambda(Bu, u) = (u - \lambda Bu, u). \tag{4.7}$$

Mettendo insieme la (4.6) e la (4.7) si ottiene la tesi

$$\|u\| \leq \|u - \lambda Bu\|.$$

Esempio 4.15 *Si consideri l'equazione*

$$-\Delta u + \lambda u = \mu |u|^{p-2} u + a|u|^{q-2} u + h(x) \quad u = 0 \quad su \quad \partial(\Omega) \tag{4.8}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato con bordo di classe C^2, $p > 2$, $3/2 < q < 2$, $a \geq 0$, $\mu > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ed $h \in L^2(\Omega)$. Si dimostra che se valgono le (H_{p-1}), allora esiste $\lambda^* > 0$ tale che per ogni $\lambda \geq -\lambda^*$ l'equazione (4.8) ammette almeno una soluzione $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

Si supponga, per ora, $\lambda \geq 0$ e applichiamo il teorema 4.14.
Posto $f(x,u,\mu) = \mu|u|^{p-2}u + a|u|^{q-2}u + h(x)$, l'ipotesi i) del teorema è soddisfatta; infatti la f è un polinomio nella variabile u, quindi è continua e rispetto alla variabile x è misurabile, dato che $h \in L^2(\Omega)$ per ipotesi.

Resta da verificare l'ipotesi ii). Sia B_R una palla in $L^2(\Omega)$ di raggio R centrata nell'origine e sia $v \in B_R$, ossia $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq R$. Si ha:

$$\begin{aligned}\|N_{f_\mu} \circ L^{-1}(v)\|_{L^2(\Omega)} &= \|\mu|L^{-1}(v)|^{p-2}L^{-1}(v) + a|L^{-1}(v)|^{q-2}L^{-1}(v) + h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \mu\left[\int_\Omega (|L^{-1}(v)|^{p-1})^2 dx\right]^{1/2} + a\left[\int_\Omega (|L^{-1}(v)|^{q-1})^2 dx\right]^{1/2} + \|h\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \mu\|L^{-1}(v)\|^{p-1}_{L^{2(p-1)}(\Omega)} + a\|L^{-1}(v)\|^{q-1}_{L^{2(q-1)}(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Poiché valgono le (H_{p-1}), per la proposizione 4.9 vale la disuguaglianza (4.2)

$$\|u\|_{L^{2(p-1)}(\Omega)} \leq \gamma\|L(u)\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{per ogni } u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega).$$

Allora, scelto $u = L^{-1}(v)$, si ottiene:

$$\|N_{f_\mu} \circ L^{-1}(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq \mu\gamma^{p-1}\|v\|^{p-1}_{L^2(\Omega)} + \|L^{-1}(v)\|^{q-1}_{L^{2(q-1)}(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)}.$$

A questo punto, nel secondo membro della seconda disuguaglianza, si può applicare al secondo addendo la disuguaglianza di Hölder con esponenti $\frac{p-1}{q-1}$ e $\frac{p-1}{p-q}$:

$$\begin{aligned}&\left[\left(\int_\Omega |L^{-1}(v)|^{2(q-1)} \cdot 1\,dx\right)^{\frac{1}{2(q-1)}}\right]^{q-1} = \left(\int_\Omega |L^{-1}(v)|^{2(q-1)} \cdot 1\,dx\right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left[\left(\int_\Omega \left(|L^{-1}(v)|^{2(q-1)}\right)^{\frac{p-1}{q-1}} dx\right)^{\frac{q-1}{p-1}}\right]^{1/2}\left[\left(\int_\Omega 1\,dx\right)^{\frac{p-q}{p-1}}\right]^{1/2} = \\ &= \left[\left(\int_\Omega |L^{-1}(v)|^{2(p-1)} dx\right)^{\frac{1}{2(p-1)}}\right]^{\dfrac{2(q-1)}{2}} [m(\Omega)]^{\frac{1}{2}\frac{p-q}{p-1}} = \\ &= \|L^{-1}(v)\|^{q-1}_{L^{2(p-1)}(\Omega)}[m(\Omega)]^{\frac{p-q}{2(p-1)}}.\end{aligned}$$

Usando ancora una volta le (H_{p-1}), si ottiene:

$$\|L^{-1}(v)\|^{q-1}_{L^{2(q-1)}(\Omega)} \leq \|L^{-1}(v)\|^{q-1}_{L^{2(p-1)}(\Omega)}[m(\Omega)]^{\frac{p-q}{2(p-1)}} \leq \gamma^{q-1}\|v\|^{q-1}_{L^2(\Omega)}[m(\Omega)]^{\frac{p-q}{2(p-1)}}$$

Concludendo:

$$\|N_{f_\mu} \circ L^{-1}(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq \mu\gamma^{p-1}\|v\|^{p-1}_{L^2(\Omega)} + a'\gamma^{q-1}\|v\|^{q-1}_{L^2(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)} \tag{4.9}$$

dove si è posto $a[m(\Omega)]^{\frac{p-q}{2(p-1)}} = a'$. Ora, $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq R$; quindi si ha:

$$\|N_{f_\mu} \circ L^{-1}(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq \mu\gamma^{p-1}R^{p-1} + a'\gamma^{q-1}R^{q-1} + \|h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Poiché $1/2 < q-1 < 1$ per ipotesi, è possibile scegliere $R > 0$ abbastanza grande in modo che

$$a'\gamma^{q-1}R^{q-1} + \|h\| < R.$$

Allora, preso

$$\mu^* = \frac{R - a'\gamma^{q-1}R^{q-1} - \|h\|}{\gamma^{p-1}R^{p-1}},$$

si ha $\|N_{f_\mu} \circ L^{-1}(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq R$, $\forall\, \mu \in (0, \mu^*)$.

Per il teorema 4.14, per ogni $\lambda \geq 0$ l'equazione (4.8) ammette una soluzione $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,2}_0(\Omega)$.

Per quanto riguarda il caso $\lambda < 0$, si usa il teorema 3.4. Lo spazio X del teorema è lo spazio $L^2(\Omega)$ e gli operatori A_μ e B sono:

$$A_\mu = N_{f_\mu} \circ L^{-1} \qquad \text{e} \qquad B = +L^{-1}.$$

Bisogna verificare le ipotesi di tale teorema. Chiaramente $X = L^2(\Omega)$ è uno spazio di Banach riflessivo.
B è lipschitziana in quanto lineare e continua:

$$\begin{aligned}\|B(u) - B(v)\|_{L^2(\Omega)} &= \|L^{-1}(u) - L^{-1}(v)\|_{L^2(\Omega)} = \\ &= \|L^{-1}(u - v)\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))}\|u - v\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

dunque $[B] = \|L^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))}$.
L'altra ipotesi sull'operatore B è la debole sequenziale continuità: si deve verificare che, presa una successione $\{u_n\} \subseteq L^2(\Omega)$, se $u_n \rightharpoonup u$ allora $B(u_n) \rightharpoonup B(u)$.
È utile ricordare i seguenti risultati noti di cui si farà uso:

1) Se Ω è un aperto limitato di classe C^1 allora $W^{2,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ con immersione compatta.

2) Se X, Y sono spazi di Banach con X riflessivo e se $A \in L(X,Y)$, allora A è compatto se e solo se $Au_n \to Au$ in Y, per ogni successione $\{u_n\} \subseteq X$ tale che $u_n \rightharpoonup u$ in X.

Sia, dunque, $\{u_n\}$ una successione tale che $u_n \rightharpoonup u$ in $L^2(\Omega)$. Poiché L^{-1} è continuo, allora $B(u_n) \rightharpoonup B(u)$ in $W^{2,2}(\Omega)$. Ora, per la 1) e la 2), $B(u_n) \to B(u)$ in $L^2(\Omega)$, quindi $B(u_n) \rightharpoonup B(u)$ in $L^2(\Omega)$.

Resta infine da verificare che l'operatore $A_\mu = N_{f(\mu)} \circ L^{-1}$ è sequenzialmente debolmente continuo. Si osservi che

$$|f(x,u)| \leq h'(x) + (\mu + a)|u|^{p-1} \tag{4.10}$$

perché per $|u| > 1$

$$|f(x,u)| \leq \mu||u|^{p-2}u| + a||u|^{q-2}u| + |h(x)| = \mu|u|^{p-1} + a|u|^{q-1} + h'(x),$$

dove si è posto $h'(x) = |h(x)|$; a questo punto, dato che $p > q$, l'andamento della f è dato dalla potenza maggiore. Segue allora la disuguaglianza (4.10). È possibile, allora, usare la proposizione 4.13. Si ha:
$h' \in L^2(\Omega)$, $(\mu + a) > 0$ e la potenza $|y|^{\frac{p}{q}}$ della proposizione corrisponde, in questo caso, a $|u|^{\frac{2(p-1)}{2}}$; allora $N_{f_\mu} : L^{2(p-1)}(\Omega) \to L^2(\Omega)$ è continua.
Sia, dunque, $\{u_n\}$ una successione in $L^2(\Omega)$ tale che $u_n \rightharpoonup u$, allora $L^{-1}(u_n) \rightharpoonup L^{-1}(u)$ in $W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ per la continuità di L^{-1}. Per i teoremi di immersione degli spazi di Sobolev, si ha

$$W^{2,2}(\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega) \qquad \text{per ogni } q < 2^* = \frac{2N}{N-2}$$

con immersione compatta e

$$W^{1,2}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \qquad \text{per ogni } q < 2^*$$

con immersione compatta; quindi dalle seguenti inclusioni non compatte:

$$W^{2,2}(\Omega) \subset W^{1,2^*}(\Omega) \subset L^{2^{**}}$$

si deduce che

$$L^{-1}(u_n) \to L^{-1}(u) \quad \text{in } L^r(\Omega),$$

per ogni $r < \overline{p}$ con $\overline{p} = 2^{**}$. Da $2^* = \frac{2N}{N-2}$, allora $2^{**} = \dfrac{\frac{2N}{N-2}N}{N - \frac{2N}{N-2}} = \frac{2N}{N-4}$. Si osservi che $2(p-1) < \overline{p} = \frac{2N}{N-4}$ perché valgono le (H_{p-1}).

Allora $L^{-1}(u_n) \to L^{-1}(u)$ in $L^{2(p-1)}(\Omega)$ e, dunque, per la proposizione 4.13, $N_{f_\mu}(L^{-1}(u_n)) \to N_{f_\mu}(L^{-1}(u))$ in $L^2(\Omega)$. Si è così ottenuto che presa una successione $\{u_n\}$ in $L^2(\Omega)$ tale che $u_n \rightharpoonup u$, si ha $N_{f_\mu} \circ L^{-1}(u_n) \rightharpoonup N_{f_\mu} \circ L^{-1}(u)$ in $L^2(\Omega)$.

Infine l'ipotesi i) del teorema 3.4 è data dalla disuguaglianza (4.9) in cui $a'\gamma^{q-1} > 0$, $\|h\|_{L^2(\Omega)} > 0$, $p-1 > 1$ cioè $p > 2$ e $0 < q-1 < 1$, cioè $1 < q < 2$ che è l'ipotesi.

Per il teorema 3.4, esiste $\mu^* > 0$ tale che per ogni $\mu \in (0, \mu^*)$ e $\lambda \in [0, \frac{1}{[B]}]$, $A_\mu + \lambda B$ ha un punto fisso $v \in L^2(\Omega)$. Se ora $\lambda < 0$, scegliendo $A_\mu = N_{f_\mu} \circ L^{-1}$ e $B = L^{-1}$ possiamo scrivere

$$N_{f_\mu} \circ L^{-1}(v) - \lambda L^{-1}(v) = (A_\mu + |\lambda| B)v;$$

poiché $|\lambda| \in [0, \frac{1}{[B]}]$, il risultato del caso precedente ci fornisce $v \in L^2(\Omega)$ tale che

$$N_{f_\mu} \circ L^{-1}(v) - \lambda L^{-1}(v) = v,$$

ossia, posto $u = L^{-1}(v)$, otteniamo che l'equazione (4.4) ha soluzione $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$.

Esempio 4.16 *Si consideri l'equazione*

$$-\Delta u = |u|^{p-2}u + h(x) \qquad u = 0 \quad su \quad \partial(\Omega) \tag{4.11}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un aperto limitato con bordo di classe C^2, $p > 2$, $h \in L^2(\Omega)$. Valgono le condizioni (H_{p-1}). Si dimostra che tale equazione ammette una soluzione $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ se h è abbastanza piccolo, nel senso specificato dal teorema 3.5 di cui si farà uso.

Infatti, posto $v = -\Delta u = Lu$, cosicché $u = L^{-1}(v)$, risolvere l'equazione (4.11) equivale a risolvere l'equazione:

$$v = |L^{-1}(v)|^{p-2}L^{-1}(v) + h(x). \tag{4.12}$$

Sia, allora, A l'operatore così definito:

$$A(v) = |L^{-1}(v)|^{p-2}L^{-1}(v).$$

Si osservi che

$$\|A(v)\|_{L^2(\Omega)} = \||L^{-1}(v)|^{p-2}L^{-1}(v)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|L^{-1}(v)|^{p-1})^2 dx\right)^{1/2} =$$

$$= \left[\left(\int_\Omega |L^{-1}(v)|^{2(p-1)} dx\right)^{\frac{1}{2(p-1)}}\right]^{p-1} = \|L^{-1}(v)\|^{p-1}_{L^{2(p-1)}(\Omega)}.$$

Poiché valgono le (H_{p-1}), si può usare la disuguaglianza (4.2)

$$\|u\|_{L^{2(p-1)}(\Omega)} \leq \gamma \|Lu\|_{L^2(\Omega)}, \qquad u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$$

già citata precedentemente. Allora

$$\|L^{-1}(v)\|_{L^{2(p-1)}(\Omega)}^{p-1} \leq \gamma^{p-1} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{p-1},$$

quindi

$$\|A(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq \gamma^{p-1} \|v\|_{L^2(\Omega)}^{p-1} \qquad \text{per ogni } v \in L^2(\Omega). \tag{4.13}$$

L'operatore A è così ben definito da $L^2(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$.
L'ipotesi di compattezza di A è assicurata dalla compattezza di L^{-1}. Infine l'ipotesi i) del teorema 3.5 è data dall'equazione (4.13).
È possibile applicare, allora, tale teorema ed ottenere un $R > 0$ tale che per ogni $h \in B_R$, l'equazione (4.12) ammette una soluzione.

Bibliografia

[BT] C. S. Barroso ed E. V. Teixeira, *A topological and geometric approach to fixed points results for sum of operators and applications*, Nonlinear Analysis 60 (2005), pp. 625-650.

[Ba] C. S. Barroso, *Krasnoselskii's fixed point theorem for weakly continuous maps*, Nonlinear Analysis 55 (2003), pp. 25-31.

[Ba] C. S. Barroso, *Semilinear elliptic equations and fixed points*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 133, n. 3, 2004, pp. 745-749.

[Br] H. Brezis, *Analisi funzionale. Teoria e applicazioni*, Liguori Editore, Napoli, 1986.

[B] T. Burton, *A fixed-point theorem of Krasnoselskii*, Applied Mathematics Letters 11 (1998), pp. 85-88.

[DS] N. Dunford e J. T. Schwartz, *Linear operators Part I*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1966.

[GT] D. Gilbarg e N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin, 2001.

[S] D. R. Smart, *Fixed point theorems*, Cambridge Tracts in Mathematics 66, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.