CUBO DI UN NUMERO ESPRESSO SOTTO FORMA DI SOMMA DI NUMERI DISPARI

Dimostriamo il seguente enunciato :

Il cubo di un numero *n* è uguale alla somma degli n-esimi numeri dispari successivi , partenti da un numero dispari che chiameremo "dispari di partenza" .

Questo enunciato può essere rappresentato nella forma sotto riportata, in cui ($n^2 - n + 1$) è, per l'appunto, il dispari di partenza:

$$\boldsymbol{n^3 = \sum_{k=0}^{n-1} [(n^2 - n + 1) + 2k]} \qquad \mathbf{(1)}$$

In altre parole :
$1^3 = 1$;
$2^3 = 3+5$ (somma di **due** numeri dispari di cui il 3 è il numero dispari di partenza);
$3^3 = 7+9+11$ (somma di **tre** numeri dispari di cui il 7 è il numero dispari di partenza);
$4^3 = 13+15+17+19$ (somma di **quattro** numeri dispari di cui il 13 è il numero dispari di partenza);
…….
n^3 = somma di **n** numeri dispari = numero dispari di partenza + n-1 numeri dispari successivi.
Il problema è di conoscere il numero dispari di partenza.
Intanto osserviamo, a titolo di esempio, che prima di 7 (che è il primo numero dispari da cui partire per poter calcolare 3^3) ci sono 2 + 1 numeri dispari. Infatti 7 è il 4° numero dispari ([7 + 1]/2).
Continuando, $3^3 = 27$ è dato dalla somma di 7 + 9 + 11 , che sono i 3 numeri dispari successivi ai 2 numeri dispari (il 3 e il 5) che, sommati tra di loro,danno come risultato il cubo perfetto precedente a 3^3,ossia $2^3 = 8$.
A sua volta 2^3 è dato dalla somma di due numeri dispari (3 + 5) che sono i due numeri dispari successivi al primo numero dispari, che essendo unico, è quindi esso stesso il cubo perfetto precedente a 2^3 ,ossia $1^3 = 1$.
Pertanto il numero dispari di partenza si ottiene considerando che:

- $\frac{n(n-1)}{2}$ è la quantità dei numeri dispari che precedono il numero dispari di partenza;
- perciò il numero dispari di partenza è il $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right) - esimo$ numero dispari;
- al $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right) - esimo$ numero dispari si devono aggiungere n-1 numeri dispari successivi (per avere la somma di n numeri dispari);
- due numeri dispari differiscono di 2;

Quindi il numero dispari di partenza che occupa la $\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right) - esima$ posizione corrisponde a $2\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right) - 1 = \boldsymbol{n^2 - n + 1}$.
Da qui si può affermare che la **(1)** è vera.
Esempio:

$$\boldsymbol{5^3 = \sum_{k=0}^{4} [(5^2 - 5 + 1) + 2k] = \underset{k=0}{21} + (\underset{k=1}{21 + 2}) + (\underset{k=2}{21 + 4}) + (\underset{k=3}{21 + 6}) + (\underset{k=4}{21 + 8}) = 125}$$

Osservazione: 125=5x21+5x4 dove 21 è il numero dispari iniziale; ciò suggerisce che

$$\boldsymbol{n^3 = n(n^2 - n + 1) + n(n - 1)}$$

che rappresenta un altro modo per ottenere il cubo di un numero.

Vitto Giuseppe

CUBO DI UN NUMERO ESPRESSO SOTTO FORMA DI SOMMA DI NUMERI DISPARI

Ci accingiamo a dimostrare il seguente enunciato :

$$n^3 = \sum_{k=0}^{n-1} [(n^2 - n + 1) + 2k] \qquad (\mathbf{1})$$

dove $(n^2 - n + 1)$ rappresenta il numero dispari di partenza a cui si devono aggiungere gli (n-1)-esimi numeri dispari successivi per poter calcolare n^3.

Utilizzeremo come metodo di dimostrazione quello dell'**induzione completa.**

Per n = 1 , la **(1)** risulta veritiera; supposto la (1) vera per n bisogna dimostrare che è anche vera per n + 1 .

Per n + 1 la **(1)** diventa :

$$(n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} (((n+1)^2 - (n+1) + 1) + 2k)$$

Infatti, partendo dal secondo membro, si ha:

$$\sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}} \left(((\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^{\mathbf{2}} - (\boldsymbol{n}+\mathbf{1}) + \mathbf{1}) + \mathbf{2}\boldsymbol{k} \right) = \sum_{k=0}^{n} ((n^2 + 1 + 2n - n - 1 + 1) + 2k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} ((n^2 - n + 1) + 2n + 2k) + (n+1)^2 - (n+1) + 1 + 2n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} ((n^2 - n + 1) + 2k) + \sum_{k=0}^{n-1} (2n + 2k) + n^2 + 1 + 2n - n - 1 + 1 + 2n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} ((n^2 - n + 1) + 2k) + \sum_{k=0}^{n-1} (2n + 2k) + n^2 + 3n + 1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} ((n^2 - n + 1) + 2k) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} (n + k) + n^2 + 3n + 1 =$$

$$= n^3 + 2n^2 + n^2 + 3n + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})^{\mathbf{3}} .$$

(Si osservi che la prima sommatoria (quella in rosso), poiché la **(1)** è assunta vera per n, è uguale a n^3; la seconda sommatoria (quella in verde) è uguale a n^2 (per *k* che va da 0 a n-1, essa è uguale a n volte n in quanto n viene sommato n-1 volte più la prima volta in cui k=0)).

Vitto Giuseppe