

MI ASCOLTI. AVVISI GLI INFINITI OSPITI DELL'ALBERGO E CHIEDA LORO DI PASSARE, OGNUNO, NELLA CAMERA IMMEDIATAMENTE SUCCESSIVA ALLA PROPRIA.



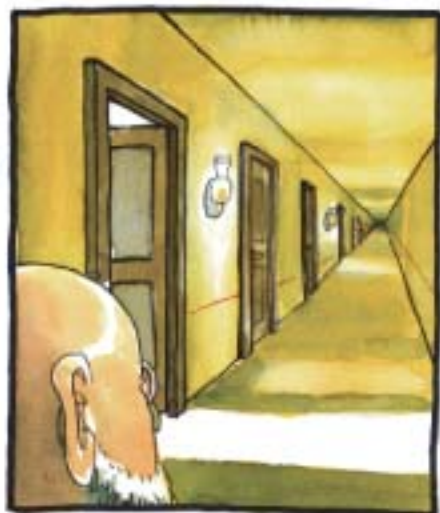
COSICCHE' CHI E' NELLA PRIMA PASSI NELLA SECONDA.

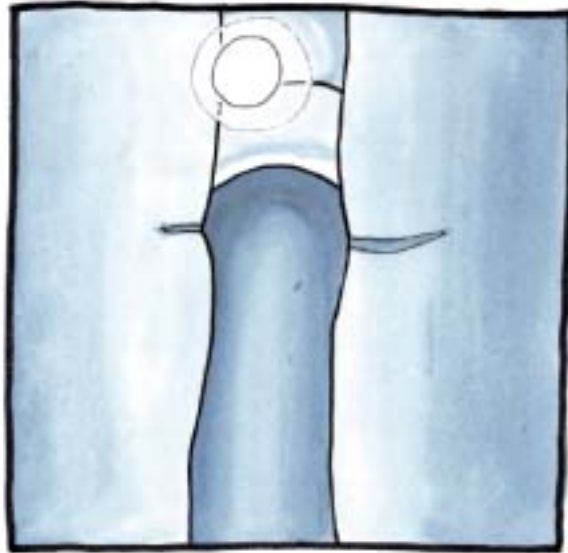


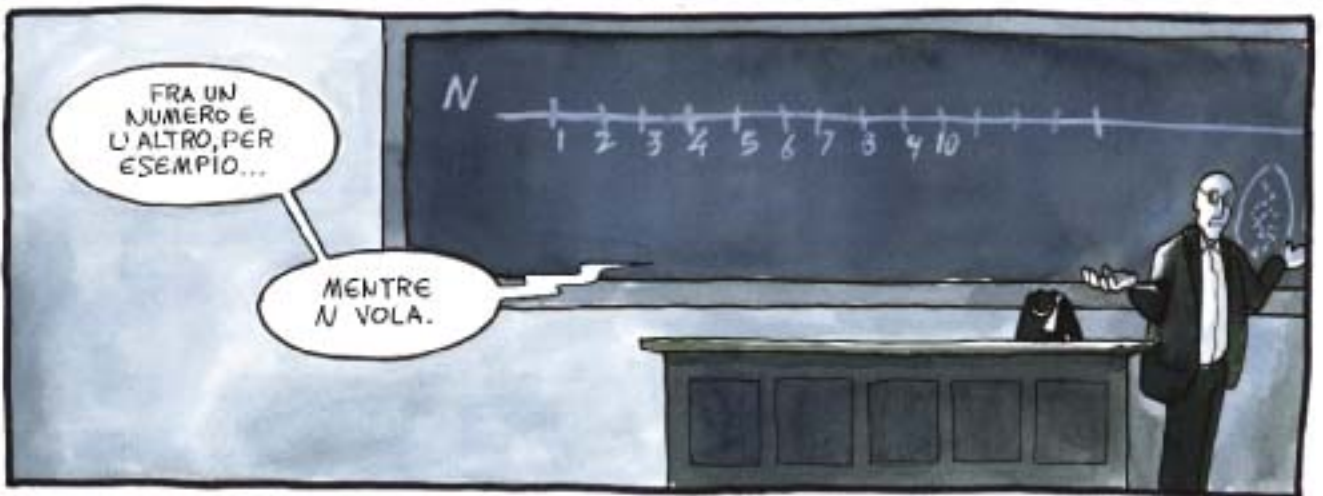
CHI E' NELLA SECONDA SI SPOSTI NELLA TERZA.
CHI E' NELLA TERZA, NELLA QUARTA E COSI' VIA.



AFFINCHE' LA PRIMA CAMERA RIMANGA LIBERA E IO NE POSSA, ALFINE, DISPORRE.







C'E' UNA FRATTURA CHE SEPARA
L'UNO DAL DUE.



2

3

4



UN SALTO OBBLIGATO
NEL CONTEGGIO.

1

2

3

4

PRIMA L'UNO. SALTO. POI
IL DUE. SALTO. TRE. SALTO.

1

2

3

4



1

2

3

4



1

2

3

4

1

2

3

4

5

6

7

8

NON UNA TRASFORMAZIONE
DELL'UNO NEL DUE.
MA L'UNO.

...
E IL DUE.
UN BALZO PREPOTENTE
DALL'ODORE NUMINOSO.

...
E UN ABISSO.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

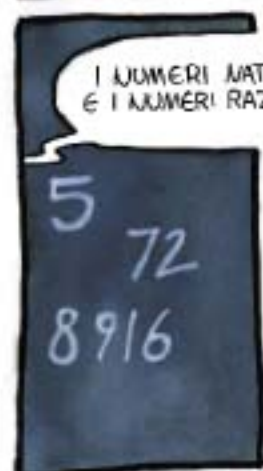




COME SAPPIAMO ESISTONO MOLTE FAMIGLIE DI NUMERI.

TAC
FSSSH

MA COSA ACCADE IN QUELL' ABISSO?



I NUMERI NATURALI E I NUMERI RAZIONALI.

I NUMERI IRRAZIONALI.

NUMERI CURIOSI DALLE INFINITE CIFRE DOPO LA VIRGOLA.

INFINITI SU UNO E GLI ALTRI.

TAC
TAC



A NOI INTERESSA CAPIRE COSA SUCCEDDE FRA UNO E DUE.

ECCONE DEGLI ESEMPI, SECONDO LA RAPPRESENTAZIONE DECIMALE.

E TIREREMO IN BALLO I NUMERI COSIDDETTI REALI.



FU GEORGE CANTOR A DISCHIUDERE LE PORTE DI UN NUOVO ORDINE DI INFINITI.

E LO FECE PROPRIO LAVORANDO SU QUESTO PROBLEMA.

QUANTI SONO I NUMERI REALI FRA UNO E DUE?

INFINITI.

ECCO QUI A PORTATA DI MANO
UNA SEMPLICISSIMA DIMOSTRAZIONE.
CANTOR NOTO' CHE ERA SEMPRE
POSSIBILE SCRIVERE UN NUMERO R,
COMPRESO FRA UNO E DUE, CHE NON
FOSSE NE' IL PRIMO, NE' IL SECONDO,
NE' IL TERZO NUMERO FRA
QUELLI DI UN DATO
ELENCO.

↓
1,485
1,19191
1,871137
1,3

SAREBBE BASTATO SCRIVERE
UN NUMERO LA CUI PRIMA CIFRA
DECIMALE NON FOSSE UGUALE
ALLA PRIMA CIFRA DECIMALE DEL
PRIMO NUMERO IN ELENCO. E LA
SECONDA CIFRA DECIMALE NON
FOSSE UGUALE ALLA SECONDA
CIFRA DECIMALE DEL SECONDO
NUMERO IN ELENCO.

E LA TERZA
CIFRA DECIMALE NON
FOSSE UGUALE ALLA TERZA
CIFRA DECIMALE DEL TERZO
NUMERO IN ELENCO. E COSI'
VIA, FINO A ESAURIRE
TUTTI I NUMERI
DELL'ELENCO.

↓
④85
1⑨191
1,871137
1,3

↓
④85
1⑨191
87①137
300②00

LE DIAGONALI DI CANTOR.

④
⑨
①
②
,5021~



④

INDIVIDUO
LA PRIMA CIFRA
DECIMALE DEL PRIMO
NUMERO IN ELENCO
E LA CAMBIO.

AGGIUNGO UNO
PER VARIARLA, AD
ESEMPIO.

,5

④
⑨

STESSO
PROCEDIMENTO
PER LA SECONDA
CIFRA DEL
SECONDO
NUMERO.

,50

④
⑨
①

PER LA TERZA.

,502

④
⑨
①
②

E PER LA
QUARTA.

,5021~

↓
485

IN QUESTO MODO SONO SICURO DI SCRIVERE UN NUMERO CERTAMENTE DIVERSO DAL PRIMO.

5021~

↓
485
19191

DAL SECONDO.

5021~

↓
105
871137

DAL TERZO.

5021~

↓
871137
300000
5021~

DAL QUARTO E VIA DI SEGUITO.

↓
485
19191
871137
300000
5021~

E, A LUNGO ANDARE, CI SI ACCORGE CHE QUESTO GIOCHETTO FUNZIONA ANCHE SE L'ELENCO È COMPOSTO DA INFINITI NUMERI CON INFINITE CIFRE DOPO LA VIRGOLA.

↓
485
19191
871137
300000
5021~

È SEMPRE POSSIBILE SCRIVERE UN NUOVO NUMERO E INTEGRARLO NELL'ELENCO.

1 2

R

DUNQUE, FRA UNO E DUE ESISTE UN'INFINITA' DI ALTRI NUMERI, E CANTOR SCOPRE UN NUOVO INFINITO RANNICCHIATO IN QUELL'INCREDIBILE ANFRATTO.

UN INFINITO DI ORDINE SUPERIORE.

X

ALPH.

E QUANDO PARLO DI UN INFINITO DI ORDINE SUPERIORE, INTENDO DIRE DI UN'ENTITÀ IMMENSAMENTE PIÙ GRANDE DELL'INFINITO CUI TENDONO I NUMERI NATURALI.

R

DETTO IN UN ALTRO MODO: ESISTONO PIÙ NUMERI R FRA UNO E DUE DI QUANTI NUMERI N CORRANO SULLA RETTA DEI NUMERI NATURALI.



LA LUCE E L'IMMENZA
CALEIDOSCOPICA INFINITA'
CHE CANTOR VIDE
FURONO ACCECANTI.

ESISTEVANO
INFINITI DI GRANDEZZE
DIVERSE...

CANTOR NE FU
COSI' COLPITO CHE
RIVOLUZIONO' ADDIRITTURA
LA NOMENCLATURA
MATEMATICA.

~~∞~~ \aleph_0

CHIAMO' L'INFINITO
DEI NUMERI NATURALI
ALEPH ZERO.

Poi IPOTIZZO
CHE L'INFINITO DEI
NUMERI REALI, PIU' DENSO
DI ALEPH ZERO, POTESSE
ESSERE ALEPH UNO.

\aleph_1

CANTOR MORI' CERCANDO DI
DIMOSTRARE CHE ESISTEVANO,
UNO DIETRO L'ALTRO, ALEPH
ZERO E ALEPH UNO...

$\aleph_0 \dots \aleph_1 \dots \aleph_2 \dots \aleph_R$

... ALEPH
DUE E ALEPH
TRE E, VIA VIA,
TUTTI GLI
ALTRI.

QUASI A SCIMMIOTTARE
I LORO PROGENITORI.

1 2 3 4 5
 $\aleph_1 \aleph_2 \aleph_3 \aleph_4 \aleph_5$

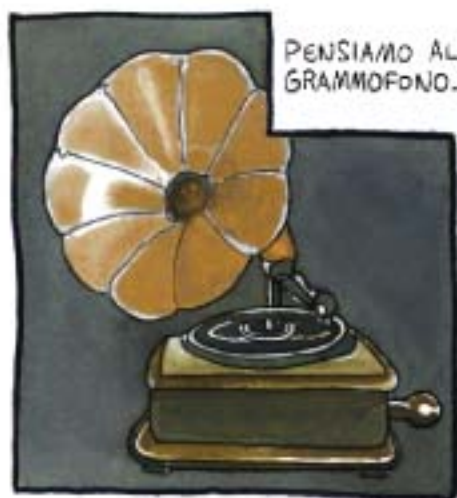
NON POTEVA
IMMAGINARE DI ESSERE
INCAPPATO IN UN PROBLEMA
IRRISOLVIBILE.











PENSIAMO AI DISCHI.
IL GRAMMOFONO SUONA I DISCHI.



FUOR DI METAFORA, IL GRAMMOFONO È LA MATEMATICA.
I DISCHI SONO LE PROPOSIZIONI FORMALI, LE FUNZIONI MATEMATICHE.



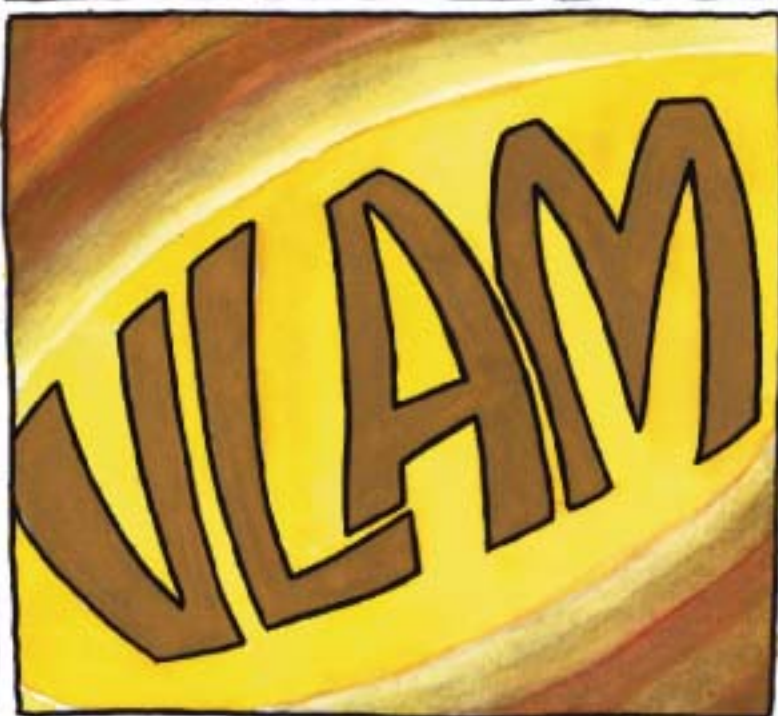
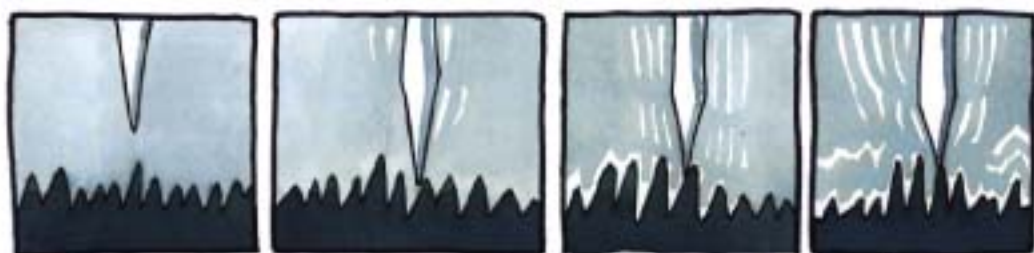
ED ECCO CHE POSSIAMO SUONARE UNA MOLTEPLICITÀ DI DISCHI, SECONDO LE OCCASIONI,
MA C'È ALMENO UN DISCO PER OGNI GRAMMOFONO CHE NON PUÒ ESSERE SUONATO.



PENA: LA MESSA IN RISONANZA DELL'INTERO SISTEMA DISCO - GRAMMOFONO.
MI SPIEGO: IL DISCO RECA INCISA LA FREQUENZA f . LA PUNTINA TRADUCE IL SOLCO E VIBRA
COME f IMPONE. LA TROMBA CANTA f E FA VIBRARE DI f L'INTERO GRAMMOFONO.

ORA, OGNI SISTEMA, PER SUA PROPRIA CONFORMAZIONE E MASSA E VOLUME, HA UNA SUA PECULIARE FREQUENZA DI RISONANZA f_r E IL SISTEMA DISCO-GRAMMOFONO NON FA ECCEZIONE. SE IL DISCO RECA INCISA LA FREQUENZA f_r , CHE COSA SUONERÀ IL GRAMMOFONO?

SE f È
UGUALE
A f_r ...
VLAM!...



GÖDEL SCOPRÌ CHE ESISTEVANO SITUAZIONI
MATEMATICHE INDECIDIBILI, PARADOSSALI,
LA CUI SOLUZIONE NON SI POTEVA ENUNCIARE.

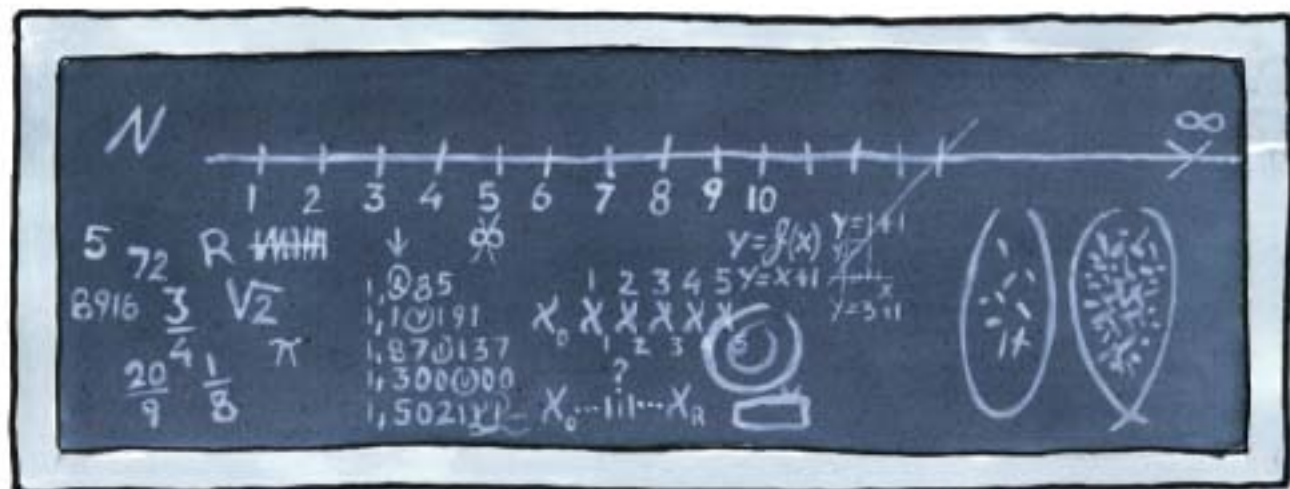
PROPRIO COME, NEL LINGUAGGIO COMUNE,
NON È POSSIBILE STABILIRE SE IL CRETESE
MENTE O DICE LA VERITÀ.

ESISTONO DISCHI CHE, SE SUONATI, MANDANO
PER ARIA I GRAMMOFONI.

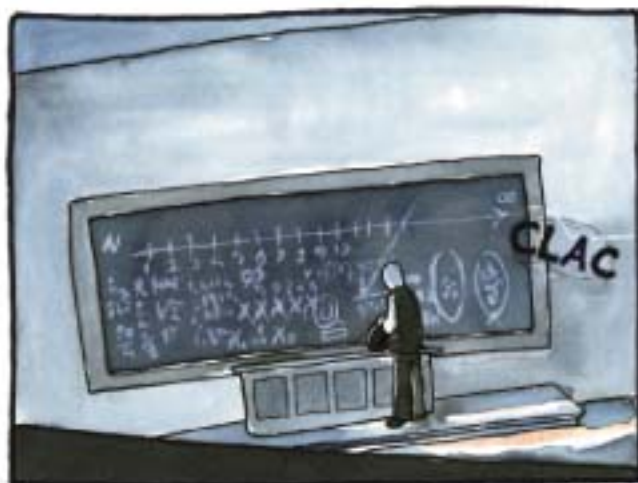
ESISTONO PROPOSIZIONI MATEMATICHE
CHE INCASTRANO LA MATEMATICA.

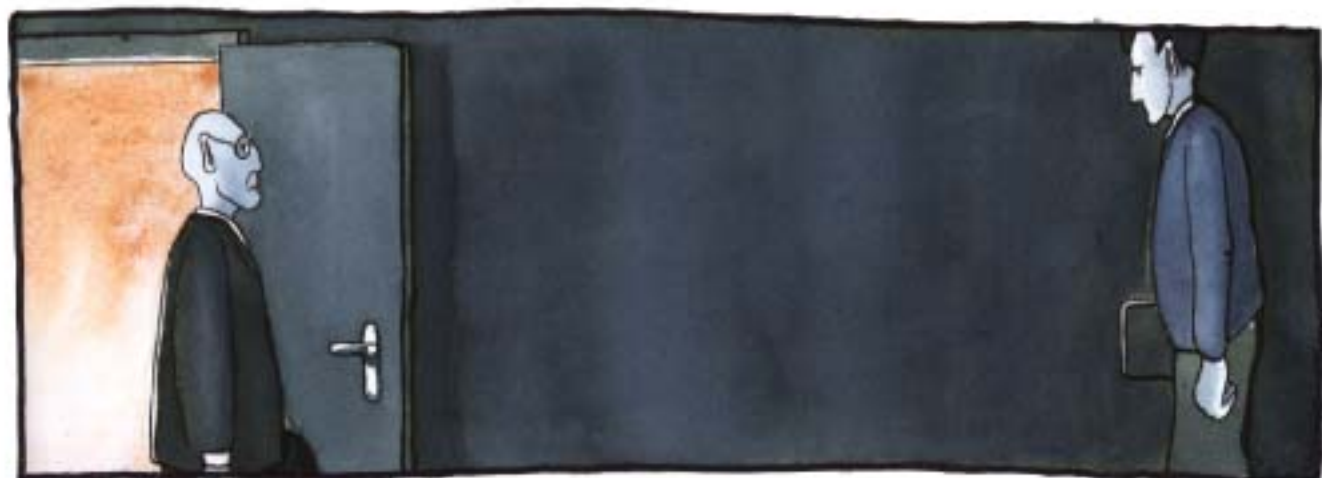
CANTOR, IGNARO DI QUESTA PARADOSSALE REALTÀ,
INCAPPO' SUO MALGRADO IN UN PROBLEMA
IRRISOLVIBILE: IL PROBLEMA DEL CONTINUO.

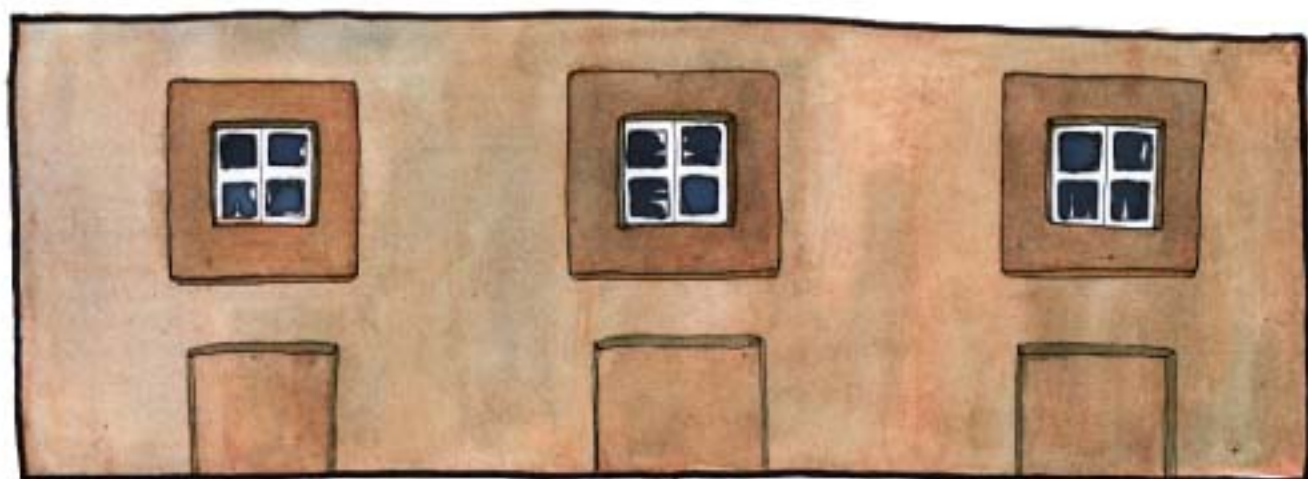












ORBENE, SE NON STAVO PARLANDO AI MURI, VARREBBE SÌ LA PENA DI CONTINUARE...

OCCORRONO DELLE PRECISAZIONI.

VEDE, IL PROBLEMA SU CUI SI ARENÒ CANTOR, NOTO COME IL PROBLEMA DEL CONTINUO, È DI UNA CERTA PORTATA.

L'HO POC'ANZI SFIORATO CON UN ESEMPIO SOMMARIO, CITANDO LE ORMAI FAMOSE DIAGONALIZZAZIONI, MA MERITA UN APPROFONDIMENTO.

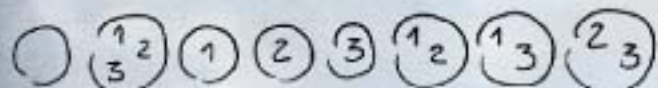
CANTOR, A QUELL' EPOCA, LAVORAVA SUGLI INSIEMI, E SCOPRÌ CHE L'INFINITO CUI TENDEVANO I NUMERI REALI ERA ASSAI PIÙ NUMEROSO DI QUELLO DEI NUMERI NATURALI. ERA GIÀ A CONOSCENZA DEL FATTO CHE ESISTEVANO INNUMEREVOLI INFINITI, MA LA SCOPERTA DELL'INFINITO DEI NUMERI REALI LO DESTABILIZZÒ...

FACCIA MENTE LOCALE SULL'INSIEME DEI PRIMI TRE NUMERI NATURALI.



QUANTI SONO I SOTTOINSIEMI CHE POSSONO ESSERE DERIVATI DALL'INSIEME DI PARTENZA?

OTTO. VALE A DIRE TUTTE LE COMBINAZIONI POSSIBILI DEI TRE ELEMENTI DI PARTENZA.



IL RISULTATO È GENERALIZZABILE COME:

$$2^3 = 8$$

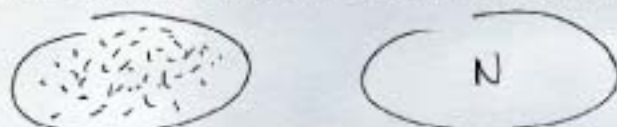
DUE PER DUE PER DUE.

3 È IL NUMERO DI ELEMENTI DI PARTENZA,

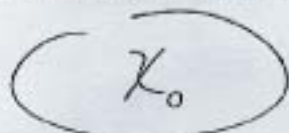
2 SONO LE POSSIBILITÀ CHE CIASCUN ELEMENTO HA DI FAR PARTE DI UN DATO SOTTOINSIEME: O L'ELEMENTO FA PARTE DEL SOTTOINSIEME (1), O NON NE FA PARTE (2).



ORA PENSI ALL'INSIEME DEI NUMERI NATURALI.



SAPPIAMO CHE GLI N SONO INFINITI.



DUNQUE, DALL'INSIEME DEI NUMERI NATURALI POSSIAMO DERIVARE

2^{\aleph_0} SOTTOINSIEMI.

CAPISCE BENE CHE DUE ELEVATO A INFINITO E' MOOOOLTO PIÙ GRANDE DI INFINITO.

DUE PER DUE PER DUE PER DUE PER DUE PER DUE PER DUE ...

... PER INFINITE VOLTE.

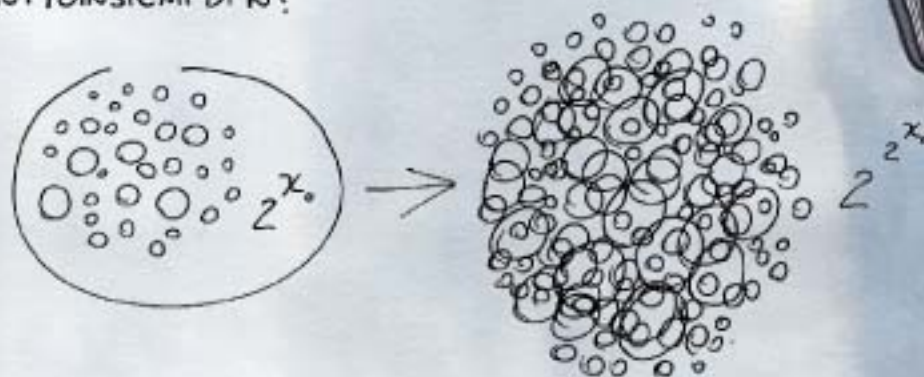
... UN INFINITO DI ORDINE SUPERIORE... ALEPH UNO.

MA SI PUÒ ANDARE OLTRE.

SE DALL'INSIEME DEGLI N, OTTENDO 2^{\aleph_0} SOTTOINSIEMI,



QUANTI SOTTOINSIEMI OTTENDO DALL'INSIEME DEI SOTTOINSIEMI DI N?



DUE ELEVATO A DUE ELEVATO A INFINITO... ALEPH DUE.





1 → 2 → 3 → 4 → 5
 χ_0 → χ_1 → χ_2 → χ_3 → χ_4

... CHE HANNO
UNA PROGRESSIONE
SIMILE A QUELLA DEI
NUMERI MA, COME
DIRE...

COSA
C'ENTRANO
LE DIAGONALI
DI CANTOR?

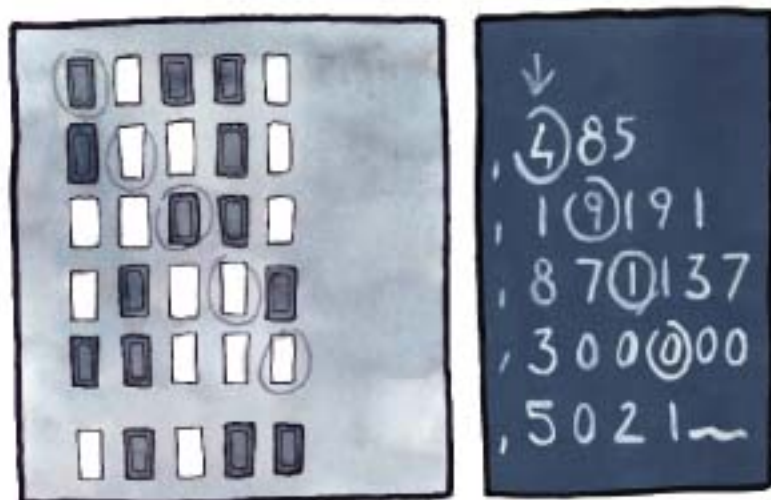




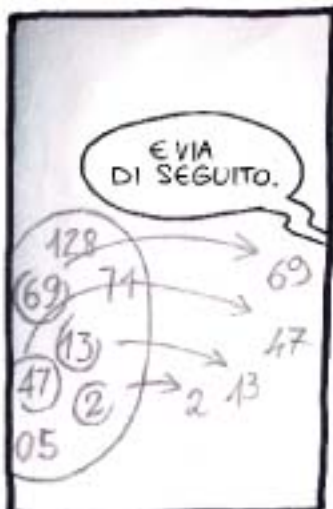
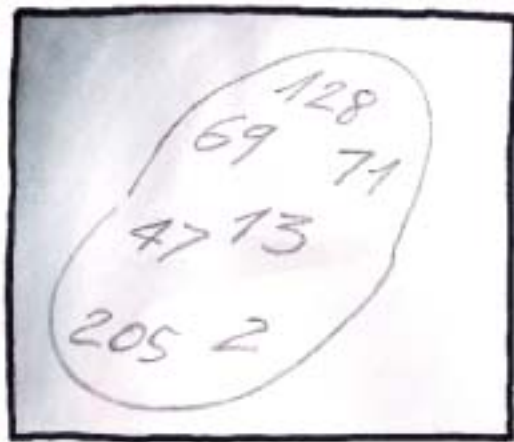




E' SEMPRE POSSIBILE FORMARE UN NUOVO INSIEME, DIVERSO DA TUTTI QUELLI DATI...









ECCO QUAL È IL PROBLEMA DEL CONTINUO: MANCA UNA PROCEDURA CHE CI PERMETTA DI ORDINARE GLI INFINITI...





SE FOSSE STATA ESCOGITATA, IL PROBLEMA DEL CONTINUO SAREBBE STATO RISOLTO, E LA FOLTA SCHIERA DI PARADOSSI GÖDELIANI AVREBBE PERSO UNO DEI SUOI PIÙ ILLUSTRI PERSONAGGI!





