

## DERIVATA

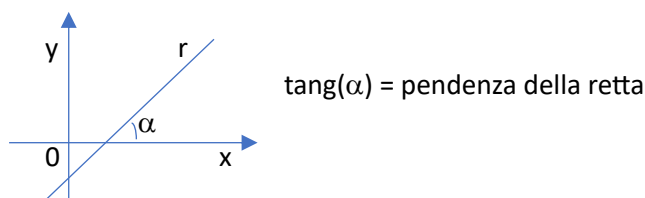
Nel XVII secolo c'era la necessità di conoscere la velocità e l'accelerazione di un moto in ogni punto della sua traiettoria. Si aggiungeva la ricerca della retta tangente ad una curva in ogni suo punto. D'ora in avanti si indicherà con la scrittura  $y=f(x)$  l'equazione di una curva o più semplicemente con  $f(x)$ .

Ci sono, dunque, due questioni da risolvere: una fisica e l'altra matematica.

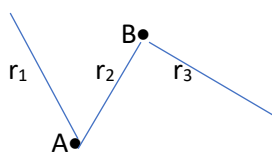
Due grandi matematici, oltre ad essere filosofi, in modo indipendente l'uno dall'altro, svilupparono strumenti matematici per risolvere entrambe le questioni: l'inglese Isaac Newton (1643-1727) e il tedesco Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Nacque dal loro studio il cosiddetto **calcolo infinitesimale**.

### Considerazioni sulla direzione o pendenza

Ricordo che la pendenza di una retta è determinata dalla tangente dell'angolo che la retta forma con l'asse orizzontale delle  $x$ . Il valore della tangente dell'angolo rappresenta il cosiddetto coefficiente angolare. Ecco perché la **direzione o pendenza**, la **tangente dell'angolo** che la retta forma con l'asse delle  $x$  e il **coefficiente angolare** indicano lo stesso concetto. Noi utilizzeremo tutte le forme a seconda del contesto.



- Se si ha una retta  $r$  allora la pendenza in ogni suo punto coincide con la pendenza della retta stessa;
- Considero una spezzata; indico con  $r_1, r_2, r_3$  i tre spezzoni e con A e B i punti a gomito.



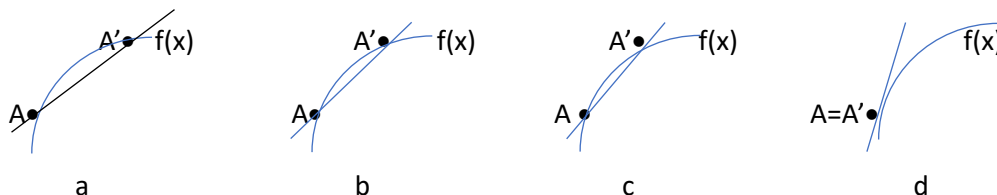
La pendenza della spezzata in ogni suo punto coincide con

- la pendenza di  $r_1$  se essi appartengono a  $r_1$
- la pendenza di  $r_2$  se essi appartengono a  $r_2$
- la pendenza di  $r_3$  se essi appartengono a  $r_3$

Nei punti a gomito A e B c'è incertezza nel determinare la pendenza poiché essi appartengono a due tratti della spezzata e, quindi, vi è un cambio di direzione (pendenza).

- Considero ora una curva  $\gamma$ . Essa cambia di direzione in modo continuo. In ogni suo punto c'è l'incertezza di determinare la pendenza. Vedo come risolvere questo inconveniente, studiando la sequenza delle immagini riportate sotto.

Prendo il punto A su  $\gamma$ , da esso traccio la secante AA'. Faccio scorrere A' lungo la curva fino a che coincida con A, di modo che la secante diventi tangente in A alla curva  $\gamma$ .



Il segmento AA' diventa sempre più piccolo come in b e c, la secante in d è diventata tangente in A (vedi in "Giocando con l'infinito" della matematica ungherese Rósz Péter, 1905-1977).

Allora la direzione di  $\gamma$  nel punto A coincide con la direzione della retta tangente in esso.

Ora sappiamo che cosa si deve intendere per direzione di una curva in un suo punto: è la direzione della retta tangente alla curva nel punto considerato. Ma la tangente ad una curva, dal punto di vista della geometria analitica (Cartesio nel 1637 scrisse "Geometria" dove coniugò la geometria con l'algebra), viene individuata dalla sua pendenza, cioè dal suo coefficiente angolare.

Qui entra in ballo **la derivata, cioè lo strumento matematico che determina la direzione di una curva in ogni suo punto. In altre parole, la derivata rappresenta geometricamente la pendenza della retta tangente al grafico della funzione  $y=f(x)$  nel punto  $x$ .**

Ma la pendenza di una retta viene determinata dal coefficiente angolare, pertanto possiamo affermare che

**la derivata rappresenta la totalità dei coefficienti angolari delle varie tangenti.**

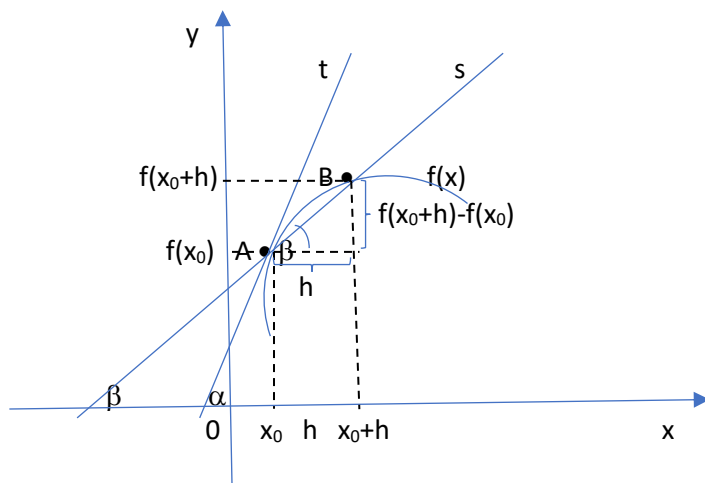
D'ora in avanti indicheremo con la scrittura  $y=f(x)$  l'espressione algebrica di una curva, la funzione che ne rappresenta l'equazione. Parleremo, dunque, di funzione al posto di curva e diremo derivata di una funzione. La derivata di una funzione  $y=f(x)$  viene indicata con uno dei seguenti simboli:

$$y', \text{ oppure } f'(x), \text{ oppure } \frac{dy}{dx}$$

I primi due sono dovuti al matematico italiano Giuseppe Luigi Lagrangia, naturalizzato in seguito francese in Joseph-Louis Lagrange (nato a Torino il 25.10.1736 e morto a Parigi il 10.04.1813); l'ultimo simbolo è del matematico e filosofo tedesco Gottfried Wilhelm Leibniz.

Vediamo ora come è stato costruito lo strumento matematico per calcolare la derivata di una funzione.

Sia  $s$  la secante per  $A$  che interseca in  $B$  la  $f(x)$ . Ruoto  $s$  in senso antiorario fino a che essa assume la posizione della tangente  $t$  in  $A$ . Ciò significa che l'incremento  $h$  di  $x_0$  sull'asse delle  $x$  si rimpicciolisce fino a diventare zero. L'angolo  $\beta$  coinciderà con l'angolo  $\alpha$ , di conseguenza  $\tan(\beta)$  sarà uguale a  $\tan(\alpha)$ .



Ma

$$\tan(\beta) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad (\text{vedi la figura sopra})$$

per cui possiamo dire che, per  $h$  che tende a zero, il rapporto  $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$  tende a  $\tan(\alpha)$ .

La quantità  $f(x_0+h) - f(x_0)$  è l'incremento che la  $f(x)$  assume sull'asse delle  $y$ ,  $h$  è l'incremento della variabile indipendente  $x$  sull'asse delle ascisse.

L'espressione  $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$  si dice **rapporto incrementale**.

In simboli, quanto detto si scrive

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan(\alpha)$$

cioè il limite, per  $h$  che tende a zero, del rapporto incrementale è uguale al coefficiente angolare della tangente in  $A$  alla curva  $f(x)$ .

Mentre

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

rappresenta la **derivata** di  $f(x)$  nel punto di ascissa  $x_0$ .

Generalizzando, per un generico valore della variabile indipendente  $x$ , il limite del rapporto incrementale per  $h$  che tende a zero

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

è la derivata della  $f(x)$ . Si scrive

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

### Osservazione

Ci possono essere dei punti di una qualche curva dove il limite del rapporto incrementale non esiste, cioè punti dove la  $f(x)$  non è “derivabile”, vale a dire punti dove non è possibile tracciare la tangente.

Perciò si dice che:

**La derivata è il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale.**

Entrambi i simboli, quello di Leibniz e quello di Lagrange, sono oggi usati a livello internazionale e presenti in tutti i testi di matematica, nella ricerca scientifica, in molte applicazioni tecnologiche, in fisica, nell'intelligenza artificiale.

### Siano degli esempi

- 1) Sia  $y=x^2$  la funzione che rappresenta una parabola con vertice nell'origine. Calcolo la derivata, cioè il limite del rapporto incrementale

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x + 0 = 2x \end{aligned}$$

Pertanto da  $y=x^2$  segue che la derivata è  $y'=2x$ .

La quantità  $2x$  indica la totalità dei coefficienti angolari (pendenze) delle varie tangenti.

Se voglio sapere la pendenza della parabola  $y=x^2$  nel suo punto di ascissa 1, sostituisco 1 alla  $x$  di  $2x$ :  $2 \times 1 = 2$ .

E il valore di 2 rappresenta il coefficiente angolare della tangente in quel punto.

Ciò mi consente di trovare proprio l'equazione della tangente.

Trovo prima l'ordinata del punto in questione, sostituendo l'ascissa 1 nell'equazione della parabola  $y=x^2$ :

si ha  $y=1^2=1$ . Il punto ha coordinate (1,1).

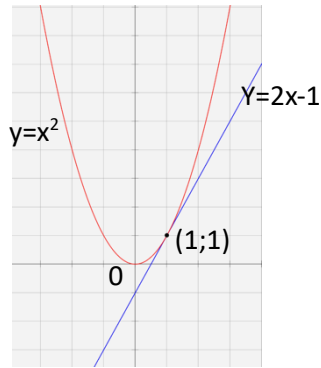
Conosciamo anche il coefficiente angolare  $m=2$ , e ricordando che la generica retta per un punto è

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

si ha

$$y - 1 = 2(x - 1) \rightarrow y = 2x - 2 + 1 \rightarrow y = 2x - 1$$

Quest'ultima espressione è l'equazione della tangente alla parabola nel punto (1;1)



Generalizzo.

L'equazione della tangente ad una curva di equazione  $y=f(x)$  nel punto  $(x_0; y_0)$  è data da

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

dove  $f'(x_0)$  è la derivata di  $f(x)$  calcolata in  $x_0$ , che rappresenta il coefficiente angolare della tangente.

- 2) Sia  $y=\text{sen}(x)$  la funzione goniometrica del seno. Calcolo la sua derivata con il limite del rapporto incrementale.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) \cos(h) + \cos(x) \text{sen}(h) - \text{sen}(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x) \text{sen}(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \text{sen}(h)}{h} = \\ \text{sen}(x) \times \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(h) - 1)}{h}}_{=0, \text{ limite notevole}} + \cos(x) \times \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h}}_{=1, \text{ limite notevole}} &= \text{sen}(x) \times 0 + \cos(x) \times 1 = \mathbf{\cos(x)} \end{aligned}$$

Pertanto da  $y=\text{sen}(x)$  segue che la derivata è  $y'=\cos(x)$ .

Per tantissime funzioni è stata calcolata la relativa derivata. Ci sono tavole delle derivate, risparmiandoci la fatica di effettuare calcoli.