

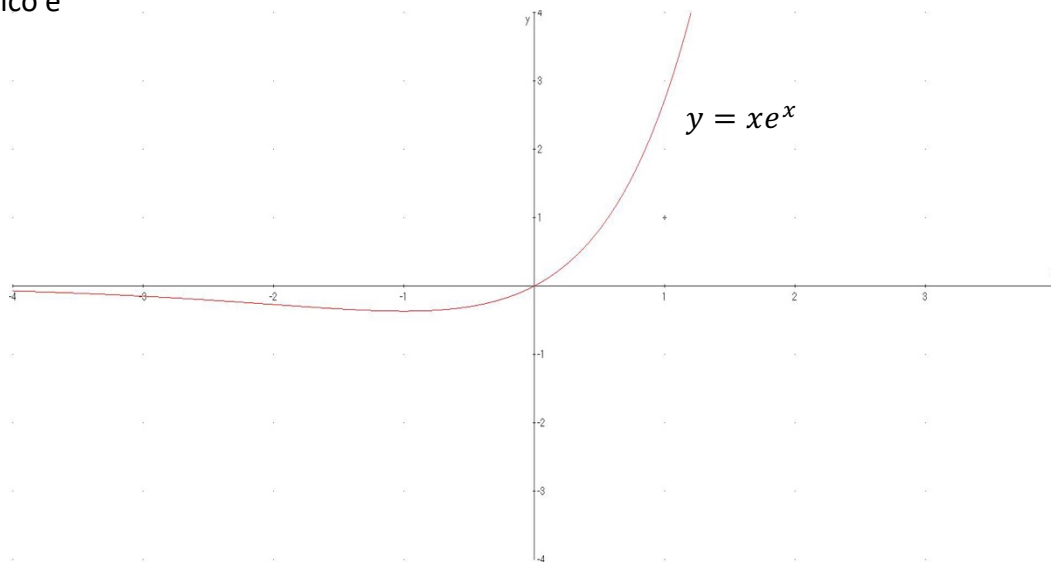
La funzione di LAMBERT

Risolvere un'equazione trascendente del tipo $x^x = a$ con le funzioni elementari, come logaritmi o potenze semplici non è possibile. Allora si risolve ricorrendo a una funzione speciale che la trasforma in un'equazione risolvibile. Questa funzione speciale è la **Funzione W di Lambert** (o **funzione Omega indicata con Ω**).

Sia la funzione

$$f(x) = xe^x$$

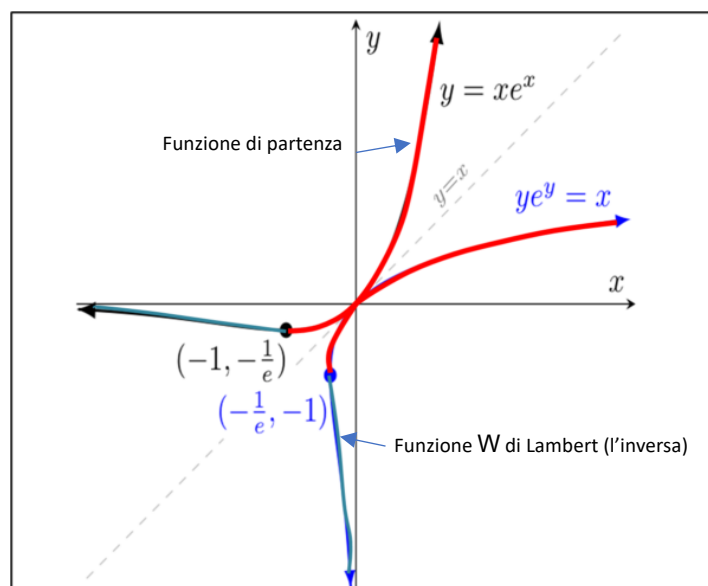
Il cui grafico è



Tale funzione ha dominio $D = (-\infty, +\infty)$; non è biunivoca, pertanto non è invertibile nel suo dominio. Se restringiamo il suo dominio, dividendolo in

$$(-\infty, 0] \cup [0, +\infty)$$

Allora è possibile trovare una sua inversa in ciascun sottoinsieme del dominio. Quindi si hanno più rami della funzione inversa, cioè più funzioni inverse. Ricordiamo che una funzione $f(x)$ e la sua inversa $f^{-1}(x)$ sono simmetriche rispetto alla bisettrice $y=x$ del primo e terzo quadrante.



L'insieme di questi rami (delle funzioni inverse) rappresenta la funzione di LAMBERT (da Johann Heinrich Lambert filosofo, matematico, fisico e astronomo svizzero, nonché uno dei pionieri della geometria non euclidea, 26/08/1728-25/09/1777).

La funzione di Lambert viene indicata con la lettera W, ma viene anche detta funzione Ω (omega).

La Trasformazione (Funzione W di Lambert)

La Funzione W di Lambert, definita $W(z)$, è data come funzione inversa della funzione $f(\omega) = \omega e^\omega$, cioè $f^{-1}(\omega) = W(z)$.

In altre parole, se: $z = \omega e^\omega$ allora, per definizione, si ha $\omega = W(z)$.

L'obiettivo della trasformazione è portare l'equazione $x^x = a$ nella forma $\omega e^\omega = z$.

La funzione di Lambert è una funzione polidroma (tranne in zero), cioè ha più rami nel piano complesso.

Ricordo che polidroma è una funzione W complessa che ad ogni punto del piano complesso in cui è definita, fa corrispondere più punti immagine.

La funzione di Lambert:

- ☐ Serve a risolvere equazioni con l'incognita sia nella base che nell'esponente (come $f(x) = x^x$); oppure equazioni trascendenti del tipo $ae^{bx} = cx + d$.
- ☐ Non si può esprimere usando solo le normali funzioni elementari (come logaritmi o potenze).
- ☐ Trova applicazioni nella fisica, nella teoria dei numeri e nel calcolo delle equazioni differenziali con ritardo.

Le equazioni differenziali con ritardo sono equazioni in cui la derivata di una funzione in un dato istante dipende non solo dallo stato presente t , ma anche da stati passati τ (tau).

Una equazione differenziale con ritardo relaziona il valore attuale $y'(t)$ con il valore della soluzione in un tempo ritardato $y(t - \tau)$ dove t indica l'istante presente e τ il tempo ritardato.

Le equazioni differenziali con ritardo vengono impiegate in biologia, economia e ingegneria per descrivere sistemi in cui le reazioni non sono istantanee.

Ora vediamo qualche esempio di come risolvere un'equazione del tipo $x^x = a$.

Sia l'equazione

$$x^x = 2 \quad (\alpha)$$

Utilizziamo W e trasformiamo tale equazione nella forma standard

$$z = \omega e^\omega \rightarrow \omega = W(z)$$

1. Applichiamo il logaritmo ad entrambi i membri della (α)

$$\ln(x^x) = \ln(2) \rightarrow x \ln(x) = \ln(2)$$

2. Poiché $x = e^{\ln(x)}$, l'equazione diventa

$$e^{\ln(x)} \ln(x) = \ln(2)$$

L'equazione ora è nella forma che volevamo $z = \omega e^\omega$, dove $\omega = \ln(x)$, $e^{\ln(x)} = e^\omega$ e $z = \ln(2)$.

Applichiamo la funzione W di **Lambert** ad entrambi i membri (in modo tale da invertire l'espressione ωe^ω):

$$W(e^{\ln(x)} \ln(x)) = W(\ln(2))$$

E quindi

$$\ln(x) = W(\ln(2))$$

Elevando a potenza di e

$$e^{\ln(x)} = e^{W(\ln(2))}$$

ricordando che $x = e^{\ln(x)}$ e $z = \ln(2)$, si ha

$$x = e^{W(\ln(2))} \quad (\beta)$$

Per una proprietà della funzione di Lambert si ha che

$$e^{w(z)} = \frac{z}{w(z)}$$

quindi la (β) si scrive

$$x = \frac{\ln(2)}{W(\ln(2))} \approx \frac{0,6931}{0,4444} \approx 1,5596$$