Progressione geometrica

Una **progressione geometrica** è una sequenza di numeri non nulli tali che il rapporto tra ciascun elemento e il precedente è costante; tale costante prende il nome di *ragione* della progressione geometrica e di solito si indica con la lettera ***q***.
In altre parole, se

$$a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_{n-1} , a_n$$

È una successione di numeri tale che

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Allora tale successione è una progressione geometrica.
<u>Esempio</u>

2, 4, 8, 16, 32....

è una progressione geometrica perché il rapporto tra un termine e il suo precedente è 2 (la ragione q=2)

$$\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{32}{16} = \cdots = 2$$

Osservazioni
In una progressione geometrica di ragione q si hanno le seguenti:

a) se q > 0 i termini sono tutti o positivi o tutti negativi;
b) se q < 0 i termini sono di segno alternato;
c) la progressione è **crescente** se q > 1 e i termini sono positivi, oppure se 0 < q < 1 e i termini sono negativi;
d) la progressione è **decrescente** se 0 < q < 1 e i termini sono positivi, oppure se q > 1 e i termini sono negativi;
e) la progressione è **costante** se q = 1.

Proprietà delle progressioni geometriche

1. Conoscendo il primo elemento a_1 e la ragione q di una progressione geometrica è possibile calcolare un elemento qualsiasi di posto k, a_k, della progressione, mediante la formula

$$a_k = a_1 . q^{k-1} \qquad (1)$$

<u>Esempio</u>
Sia $a_1 = 3$ e q = 2; allora il quinto termine (k=5) della progressione geometrica è

$$a_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$$

2. **Somma dei termini di una progressione geometrica**

Data una progressione geometrica che ha come primo termine a_1 e ragione $q \neq 1$, la somma S_n dei suoi primi n termini è data dalla relazione

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad (2)$$

<u>Esempio</u>
Sia $a_1 = 4$ e q = 3, la somma dei primi 5 termini della progressione geometrica è

$$S_5 = 4 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 4 \cdot \frac{243 - 1}{2} = \frac{242}{2} = 121$$

3. Relazione tra due termini a_r e a_s , con r < s

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r} \qquad (3)$$

Esempio

Calcolare il quinto termine a_5 di una progressione geometrica di ragione 3 e nono termine $a_9 = 62$

$$a_9 = a_5 \cdot q^{9-5} \rightarrow 62 = a_5 \cdot 3^{9-5} \rightarrow a_5 = \frac{62}{81}$$

4. Prodotto dei termini di una progressione geometrica

Data una progressione geometrica $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, il prodotto dei suoi termini è

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \qquad (4)$$

Esempio

Calcolare il prodotto dei termini della progressione geometrica 2, 4, 8, 16, 32, 64

$$P_6 = \sqrt{(2 \cdot 64)^6} = \sqrt{(2^7)^6} = 2^{21}$$

Osservazione sul prodotto

Sia n il numero dei termini di una progressione geometrica $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

a) Se n è dispari, allora il prodotto si ottiene anche con la relazione

$$P_n = (termine\ centrale)^n \qquad (5)$$

Se facciamo la radice n-esima del prodotto, si ha come risultato il termine centrale.

Esempio

Sia la progressione geometrica 2, 4, 8, 16, 32. Il prodotto degli n=5 termini è

$$P_5 = 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 = 32768 = 8^5$$

Estraendo la radice quinta del prodotto

$$\sqrt[5]{32768} = (32768)^{\frac{1}{5}} = 8$$

si ha come risultato 8 (cioè il termine centrale).

b) Se n è pari la (5) non può essere applicata.
A certe condizioni, se tutti i termini della progressione sono potenze del primo termine, cioè se $a_i = (a_1)^k$ con $k = i = 1,2,3, \dots, n$, allora si può applicare la seguente

$$P_n = \left(a_1^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{a_1}\right)^n = (a_1)^{\frac{n^2}{2}} \cdot (a_1)^{\frac{n}{2}} = (a_1)^{\frac{n^2+n}{2}} = (a_1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$P_n = (a_1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \qquad (6)$$

Infatti, consideriamo n=6 termini

2, 4, 8, 16, 32, 64

Il cui prodotto è dato da

$$P_6 = 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 64 = 2097152 = 2^{21}$$

Applichiamo la (6): $P_6 = 2^{\frac{6(6+1)}{2}} = 2^{21} = 2097152$

La convenienza della (6) sta nel fatto che è sufficiente conoscere il primo termine e il numero dei termini della progressione geometrica.
Inoltre ci consente di calcolare rapidamente l'ultimo termine a_n della progressione uguagliando la (4) con la (6)

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} = (a_1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Da questa si ricava

$$(a_1 \cdot a_n)^{\frac{n}{2}} = (a_1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \rightarrow (a_1)^{\frac{n}{2}} \cdot (a_n)^{\frac{n}{2}} = (a_1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \rightarrow (a_n)^{\frac{n}{2}} = \frac{(a_1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(a_1)^{\frac{n}{2}}} = (a_1)^{\frac{n^2}{2}} \rightarrow a_n = {a_1}^n$$

$$a_n = {a_1}^n \qquad (7)$$

Esempio
Conosciamo il primo termine della progressione geometrica $a_1 = 3$ e il numero dei termini $n = 6$. Il sesto termine della progressione è allora

$$a_6 = 3^6 = 243$$

Se poi voglio conoscere la ragione q, calcolo il secondo termine $a_2 = 3^2 = 9$, quindi $q = \frac{9}{3} = 3$. La conoscenza della ragione consente di calcolare anche la somma della progressione:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} =\rightarrow S_6 = 3 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 3 \cdot \frac{729 - 1}{2} = 3 \cdot 364 = 1092$$